УДК 372.851
ББК 74.58

Melnikov Yury Borisovich,
candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor,
head of the department of Applied Mathematics
of the Ural State
Economic University,
Yekaterinburg,
e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

Мельников Юрий Борисович,
канд. физ.-мат. наук,
доцент,
зав. кафедрой Прикладной математики
Уральского государственного
экономического университета,
г. Екатеринбург,
e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

Petrov Nikolay Petrovich,
candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor,
associate professor of the department
of Applied Mathematics
of the Ural State
Economic University,
Yekaterinburg,
e-mail: axial_120@mail.ru

Петров Николай Петрович,
канд. физ.-мат. наук,
доцент,
доцент кафедры
Прикладной математики
Уральского государственного
экономического университета,
г. Екатеринбург,
e-mail: axial_120@mail.ru

Rudnaya Larisa Vadimovna,
senior lecturer of the department
of Applied Mathematics
of the Ural State
Economic University,
Yekaterinburg,
e-mail: rudnaya@e1.ru

Рудная Лариса Вадимовна
ст. преподаватель кафедры
Прикладной математики
Уральского государственного
экономического университета,
г. Екатеринбург,
e-mail: rudnaya@e1.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-06-00240 А

The reported study is funded by RFBR within the research project No.16-06-00240 A

МОДЕЛИ-ПОЛИАДЫ И ИХ РОЛЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

MODELS-POLIADS AND THEIR ROLE IN TRAINING MATHEMATICS

13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания (математика)
13.00.02 – Theory and methodology of teaching and upbringing (mathematics)

Рассматривается ситуация, когда у объекта имеется система моделей, описывающих одни и те же аспекты прообраза с «примерно одинаковой детализацией». В ситуации, когда имеется механизм непосредственной передачи информации между этими моделями, такую систему моделей мы называем моделью-полиадой (варианты: модель-диада, модель-триада и др.). В этих условиях особую роль приобретает интерфейсный компонент между разными компонентами модели-полиады. Сознательное использование моделей-полиад позволяет в рамках одного исследования использовать аппарат различных теорий, что существенно повышает возможности анализа и исследования прототипа.

We examine the situation where the object has a system of models that describe the same aspects of a prototype «with nearly the same detail». In a situation where there is a mechanism of direct transfer of information between these models, such system model is called a model-polyads (option: model-dyad, model-triad, etc.). Under these conditions, the interface component between different components of the models-polyads plays a special role. Conscious use of models-polyads allows using the device of various theories in one study, which significantly increases the possibility of analysis and research of prototype.

Ключевые слова: модели, моделирование, теория моделирования, методика обучения математике, адекватность модели, характеристики адекватности, оценка адекватности, наглядность моделей, модель-диада, модель-триада, модель-полиада.

Keywords: models, modeling, modeling theory, methodology of teaching mathematics, adequacy of the model, characteristics of adequacy, adequacy assessment, visibility of models, model-dyad, model-triad, model-polyad.

Введение

Моделирование уже давно применяется не только в физике и инженерных науках, но и в экономике, социологии, биологии и др. [1; 2; 3]. Большое внимание уделяется использованию моделирования в процессе обучения [4; 5; 6; 7], осмыслению процесса моделирования [8]. В результате исследований накоплено большое число моделей, некоторые из которых описывают одни и те же особенности исследуемого объекта, но сформулированы в терминах различных теорий. Можно посмотреть на ситуацию и иначе. Многие математические конструкции имеют несколько типовых способов их задания. Например, в теории отношений при изучении отношений на множестве M рассматриваются, во-первых, собственно отношения, понимаемые как подмножество декартовой степени множества M, то есть под n-местным отношением Р понимается $P \subseteq M \times M \times \ldots \times = M^n$, во-вторых, отношение часто задается предикатом, понимаемым как высказывание о субъекте, представляющем собой упорядоченную n-ку элементов из M, которое мы называем предикатом-высказыванием, в-третьих, отношение может быть задано функцией с областью определения $M \times M \times \ldots \times = M^n$ и областью значений, состоящей из двух элементов, в качестве которых обычно рассматриваются {0; 1}, {*И*; *Л*}, {*истина*; *ложь*}, {*true*; *false*}, {*t*; *f*}. Систему существенно различных моделей, описывающих один и тот же аспект изучаемого объекта при выполнении некоторых дополнительных ограничений мы назвали моделью-полиадой. Многолетний опыт обучения, использующего целенаправленное применение моделей-полиад, показал большой дидактический и исследовательский потенциал моделей-полиад, необходимость развития соответствующего научного аппарата. **Цель** данной работы состоит в изучении моделей-полиад, то есть ситуации, когда существует нескольких способов задания объектов и ситуации, когда одни и те же аспекты исследуемого объекта исследуются существенно различными моделями. В работе решены следующие **задачи**: 1) формализация моделей-полиад; 2) представление и изучение примеров, когда математические объекты могут быть представлены в форме моделей-полиад; 3) выявление дидактического и исследовательского потенциала рассматриваемой ситуации, представление учебно-методического обеспечения, использующего дидактические и учебно-исследовательские возможности моделей-полиад.

Основная часть

Наша теория моделирования [9; 10] основана на формально-конструктивной трактовке модели, идея которой кратко представлена на рис. 1.

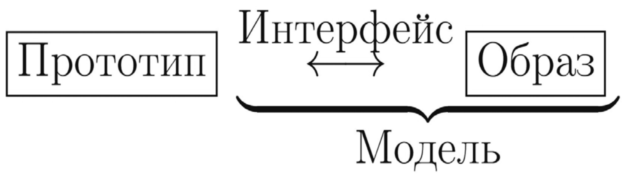


Рис. 1. Иллюстрация к формально-конструктивной трактовке модели

Под моделью мы понимаем систему из двух компонентов: интерфейсной (обеспечивающей обмен информацией между прототипом и образом) и модельно-содержательной (формализующей образ), подробнее см. [9; 11]. Особенность нашей трактовки модели состоит в том, что, во-первых, она не включает в себя требование «похожести» образа на прототип (представленное, например, фразой «изучение модели дает новую информацию об исследуемом объекте»), во-вторых, механизм обмена информацией между образом и прототипом (названный «интерфейсным компонентом модели») включен непосредственно в определение модели (полностью определение приведено в [9; 11]). Интерфейсный компонент может быть основан на описании переменных, обозначений рисунка (обычно приведенных в подписи к рисунку), правил интерпретации элементов образа (поза центральной фигуры на картине символизирует…) и др. На наш взгляд, например, уравнение нельзя назвать моделью какого-то объекта, пока не указана интерпретация составляющих этого уравнения.

Обычно от модели требуется, чтобы она адекватно отражала определенные особенности прототипа. Однако нам представляется, что включать это требование в определение модели нецелесообразно, удобнее оказалось вынести этот вопрос в отдельный раздел теории моделирования, названный нами теорией адекватности, некоторые основные идеи которой представлены на рис. 2.

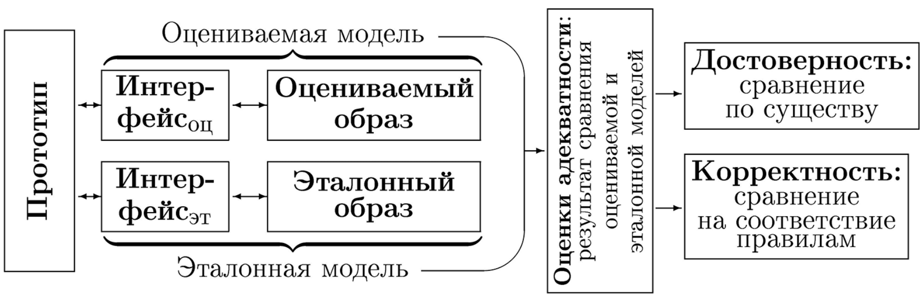


Рис. 2. Иллюстрация к понятию «адекватность модели»

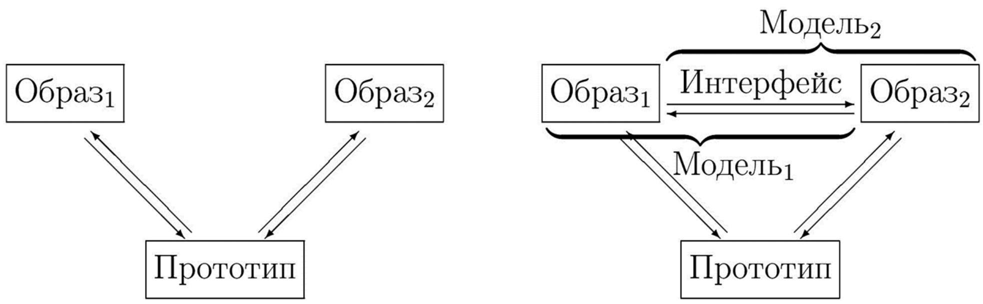
Характеристики адекватности, значениями которых являются оценки адекватности, сопоставляют паре моделей некоторую оценку уровня различий между ними. Например, при аппроксимации функции адекватность аппроксимации обычно оценивается с помощью различных норм и метрик, в частности, норм пространств $C_n[a; b]$, $CL_n[a; b]$ и т. д. Проведение контрольной работы на учебном занятии можно рассматривать как процедуру оценки адекватности результатов обучения. В этом случае оцениваемая модель представлена результатами деятельности обучаемых по выполнению контрольных заданий, эталонная модель задана набором знаний и умений (и, возможно, навыков), владение которыми должен продемонстрировать обучаемый, критерии оценки и условия выполнения работы определяют конкретный способ измерения характеристики адекватности. При оценке сочинения учитель обычно выставляет две оценки: за содержание и за грамотность. Первая оценка отражает уровень передачи авторской мысли (учащегося, критика или, допустим, автора произведения, творчество которого обсуждается в сочинении), оценку «за содержание» мы считаем частным случаем **оценки достоверности модели**. В оценке «за грамотность» отражается точность следования формальным, грамматическим правилам: соблюдение орфографии, пунктуации, правил построения предложений и др., безотносительно к содержанию сочинения. Определения уровня следования таким формальным требованиям мы считаем **оценкой корректности модели**.

Отметим два момента. Во-первых, здесь, на рис. 2, слово «эталонный» не должно ассоциироваться с понятиями «хороший», «высококачественный» и др. Например, если за эталон берутся результаты эксперимента, надо учесть, что могла быть неверна методика измерений, возможна неисправность аппаратуры, непредусмотренные условиями эксперимента воздействия (допустим, присутствовали вибрации, не замеченные экспериментатором) и др. Во-вторых, со временем могут поменяться роли эталонной и оцениваемой моделей. На этапе формирования и обоснования закона сохранения энергии эталонные модели были представлены результатами разнообразных экспериментов. Но после того как этот естественнонаучный закон был признан научным сообществом, именно его выводы признаются в качестве эталона. Теперь при обнаружении «утечки» энергии исследователь обязан обнаружить неучтенный процесс, на осуществление которого была затрачена «исчезнувшая» энергия.

В теории адекватности [10] аксиоматически формализуется оценивание адекватности, позволяется определять четкие правила и законы моделирования. Отметим, что в теории моделирования все рассматриваемые объекты являются либо моделями, либо их компонентами.

Модели-диады, модели-триады, модели-полиады

Наличие нескольких моделей одного и того же объекта обычно связано с одним из двух обстоятельств. Во-первых, разные модели могут отражать различные аспекты, грани, «срезы» рассматриваемого объекта, скажем, экономический и технологический его аспекты, особенности истории его возникновения, функционал, эргономику и др. Во-вторых, разные модели могут отражать одни и те же особенности прототипа, но делать это с использованием аппарата различных теорий (см. рис. 3 а). В последнем случае это может существенно расширить возможности по изучению и использованию возможностей моделируемого объекта, реализовывать такие его преобразования, которые в рамках одной модели было бы затруднительно осуществить. Обычно при использовании разных моделей, отражающих одни и те же особенности прототипа, между образами устанавливаются связи, обеспечивающие обмен информацией между этими объектами (см. рис. 3 б).



а) б)

Рис. 3. Иллюстрация к понятию «модель-полиада»

Систему из элементов «Образ$_1$-Интерфейс-Образ$_2$» мы будем называть **моделью-диадой**. Если моделей было не две, а три, то мы будем говорить о **модели-триаде**, а при другом числе моделей в общем случае о **модели-полиаде**. Например, векторная алгебра представлена в виде модели-триады, компонентами которой являются векторно-геометрическая (оперирующая с направленными отрезками), векторно-символическая (представленная формулами вида $\vec{a} \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \overrightarrow{AC}$) и координатная модели (см. рис. 4 и электронное интерактивное пособие [12, файл 00AnalGeom.pdf]).

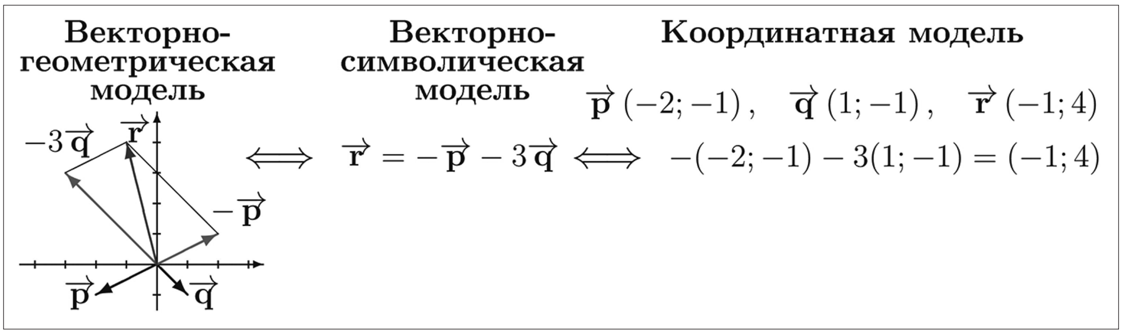


Рис. 4. Векторная алгебра как модель-триада

Нами на основе издательской системы LaTeX и пакета расширения acrotex разработана система генерирования именных индивидуальных интерактивных домашних заданий, основанных на идее изучения векторной алгебры и аналитической геометрии как модели-триады.

Изучение математических объектов как моделей-полиад

Многие математические объекты, изучаемые как в школьном курсе математики, так и различных разделах высшей математики, фактически представляют собой модели-диады, модели-триады и, в общем случае, модели-полиады. Рассмотрим некоторые дидактические аспекты изучения таких объектов, как модели-полиады.

I. *Приоритетное внимание к интерфейсу обмена информацией между компонентами модели-полиады.* Например, проблемы с усвоением комплексных чисел, на наш взгляд, во многом связаны с тем, что эта алгебра в учебниках представлена в виде модели-квадриады, состоящей из: 1) алгебры многочленов от переменной i (в радиоэлектронике вместо нее применяется буква j) с дополнительным определяющим отношением $i^2 = -1$;

2) комплексной плоскости; 3) алгебры упорядоченных пар с поэлементным сложением и умножением, заданным формулой $(a; b)(c; d) = (ac - bd; ad + bc)$; 4) алгебры матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Обычно это представление является неявным, в результате чего, во-первых, в недостаточной мере оказываются усвоенными операции комплексной плоскости и, во-вторых, у обучаемых нередко недостаточно сформировано умение использовать интерфейсные компоненты между перечисленными составляющими данной модели-квадриады.

II. *Модели-полиады как инструмент обучения построению модели.* Целенаправленное построение и изучение модели-полиады можно рассматривать как один из способов обучения моделированию. В самом деле, процесс формирования компонента модели-полиады представляет собой классический пример построения модели, более того, в практике математической деятельности каждый из компонентов модели-полиады попеременно выступает то в качестве прототипа, то в качестве образа (то есть «модели» в традиционном понимании). Например, с одной стороны, утверждение о том, что длины катетов прямоугольного треугольника равны x и y, а гипотенуза равна z, на язык равенств переводится с помощью теоремы Пифагора $x^2+y^2=z^2$, с другой стороны, если было задано данное равенство, можно интерпретировать величины x, y, z как длины соответствующих сторон прямоугольного треугольника.

III. *Применение моделей-полиад к изучению математических объектов.* Применение моделей-полиад мы обычно иллюстрируем аналогией: как высоко тренированный человек сможет подняться по одиночной достаточно высокой плоской стене без использования подручных средств? По-видимому, высшая точка определяется тем, как высоко он сможет допрыгнуть. А вот если рядом на подходящем расстоянии находится другая стена, параллельная исходной (олицетворяющая собой другой компонент модели-диады), то тренированный человек может подняться очень высоко.

Примером использования модели-диады, представленной теоремой об изоморфности линейного пространства линейных операторов и линейного пространства матриц соответствующей размерности, является доказательство теоремы о существовании для любой симметричной матрицы S такой ортогональной матрицы T, что T^tST является диагональной матрицей. Сначала рассматривается евклидово пространство соответствующей размерности с ортонормированным базисом $\boldsymbol{B}$, S интерпретируется как матрица линейного оператора $\hat{S}$. Ее симметричность интерпретируется как самосопряженность оператора $\hat{S}$, откуда следует наличие ортонормированного базиса $\boldsymbol{B}$' из его собственных векторов. Значит, матрица D оператора $\hat{S}$ в базисе $\boldsymbol{B}$' является диагональной. Пусть Т — матрица перехода из ортонормированного базиса $\boldsymbol{B}$ в ортонормированный базис $\boldsymbol{B}$'. По теореме о координатах матрицы оператора в разных базисах $D = T^{-1}ST$. Обозначим через $\hat{T}$ линейный оператор, переводящий базис $\boldsymbol{B}$ в базис $\boldsymbol{B}$'. В силу ортонормированности этих базисов линейный оператор $\hat{T}$ является ортогональным, то есть $\hat{T}^{-1} = \hat{T}^t$, откуда по теореме об изоморфности линейного пространства линейных операторов и пространства матриц $T^{-1} = T^t$, откуда получаем требуемое равенство $D = T^tST$. В процессе этого доказательства неоднократно осуществлялся переход от одного компонента модели-диады к другому и обратно. Для того чтобы студенты могли хотя бы воспринять это доказательство (не говоря о возможности их активного участия в процессе его создания), необходимо, чтобы использование интерфейсного компонента было доведено практически до автоматизма. Поэтому целесообразно изучать линейную алгебру на примерах, использующих различные линейные пространства, использовать в ходе решения переходы в арифметическое линейное пространство и обратно [13; 14; 15]. Более того, именно эта модель-диада доставляет основную идею курса линейной алгебры, вычислительный аппарат которой создается только для арифметического линейного пространства. Таким образом, главной целью развития теории линейных пространств является, во-первых, создание и изучение новых конструкций (подпространство, базис, скалярное произведение, линейный оператор и др.), во-вторых, формирование типового представления этих конструкций в арифметическом линейном пространстве (столбец или строка координат вектора, матрица линейного оператора, задание линейного пространства системой уравнений или в виде линейной оболочки базиса и др.). Это позволяет вовлекать студентов в планирование процесса изучения линейной алгебры, выбор направлений учебного исследования, оценку перспективности этих направлений, постановку целей, оценку уровня адекватности создаваемых моделей.

IV. *Применение моделей-полиад к оценке адекватности моделей.* Например, нередко изложение теории линейных пространств ориентировано только на использование арифметического линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$. Но тогда, например, совершенно непонятна задача ортогонализации базиса: зачем выбирать какой-то нелепый базис и потом его долго и нудно ортогонализировать, если естественный базис арифметического линейного пространства $\boldsymbol{R}^n$ уже вполне прекрасен — ортонормирован, легко находятся координаты вектора и др.? Вопросы исчезают, когда выясняется «косоугольность» естественного базиса $\{x^0, x, x^2\}$ (векторы считаются упорядоченными) линейного пространства многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, например, $(p(x), q(x)) = \int f(x)g(x)dx$.

Нередко ограничиваются подробным рассмотрением только одной из этих моделей, упоминая другие только «скороговоркой», до предела сокращая описание процедуры перехода от одной модели к другой. Помимо того, что такой характер изучения учебного материала создает дополнительные трудности, не удается использовать возможности по обучению моделированию (построению моделей, анализу адекватности получаемых результатов, совместному использованию аналитического аппарата каждой из компонент) для решения задач.

V. *Модели-полиады как средство обучения формированию типовых способов задания объектов.* К математическим феноменам относятся также преобразования математических объектов. Многие преобразования, например произведение матриц, может быть задано алгоритмом, а может — формулой. Поэтому в разработанных нами индивидуальных домашних заданиях, предназначенных для организации самостоятельной работы студентов, обучение переходу от одного способа задания преобразования к другому осуществляется с помощью именных индивидуальных интерактивных заданий в тестовой форме (с компьютерной проверкой результатов, вопросам применения информационных технологий посвящена, например, работа [16]). Пример результата работы одного из генераторов заданий представлен на рис. 5 (см. стр. 271).

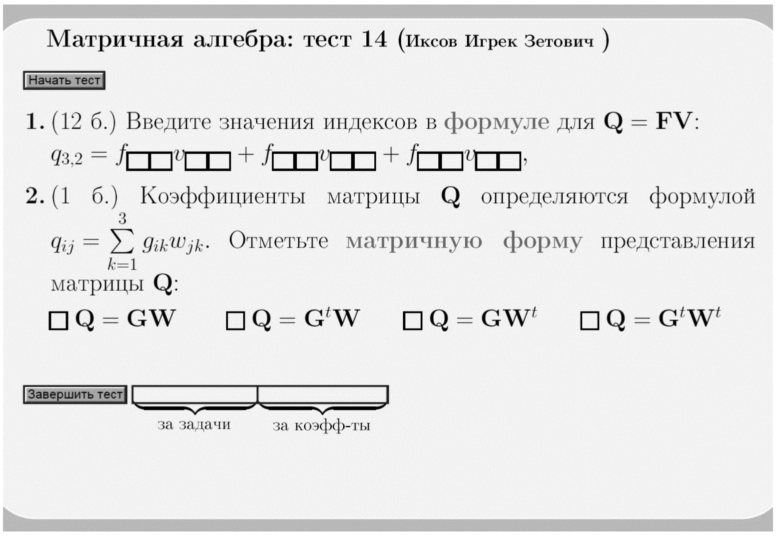


Рис. 5. Пример задания, рассчитанного на формирование умения преобразовывать информацию между заданием преобразования формулой и заданием алгоритмом

Изучение математических объектов как моделей-полиад позволяет применять их для контроля адекватности используемых и создаваемых моделей, периодически решая задачу несколькими способами, основываясь на разных моделях, являющихся компонентами модели-полиады.

Во многих случаях целесообразно не воспроизводить решение, основанное на другой компоненте модели-полиады, а применять компоненты модели-полиады только для контроля проверки результата.

VI. Модель-полиада как инструмент управления наглядностью моделей. Интуитивно ясно, что более наглядная модель требует меньше времени и сил для ее восприятия и преобразования. Например, известно, что во многих случаях геометрический метод решения задач «с параметрами» намного проще и легче решения алгебраическим методом. Время и усилия, затрачиваемые на преобразование модели, можно трактовать как частные виды ресурса. Поэтому измерение уровня наглядности и сравнение моделей по наглядности естественно осуществлять с помощью оценок объема ресурсов, требуемых для создания или восприятия этой модели и ее преобразования к требуемому виду. В [11] предложена следующая трактовка наглядности: наглядность понимается как сравнительная характеристика (то есть модель может быть либо более наглядной, либо менее наглядной), причем вывод о большей наглядности модели делается на основании сравнения расхода определенного вида ресурсов на выполнение определенного преобразования модели. Утверждается, что если две модели сравниваются по уровню наглядности, то можно определить такой интерфейс между ними и характеристики адекватности таким образом, что сравниваемые модели можно рассматривать как компоненты некоторой модели-диады (см. рис. 3 на стр. 269).

В процессе деятельности нередко происходит изменение субъекта деятельности, причем в учебной деятельности изменение субъекта (обучаемого) является приоритетной целью. Вследствие субъективности понятия «наглядная модель» это может привести к перестройке иерархии наглядных моделей. Поэтому могут получаться различные результаты сравнения по наглядности. Например, студенту, недостаточно владеющему аппаратом «школьной» геометрии, но имеющему необходимые навыки выполнения алгебраических преобразований, векторно-символическая и координатная модели могут представляться более наглядной моделью, чем векторно-геометрическая модель, хотя представление объекта в виде рисунка обычно считается более наглядным. Но если в результате обучения студент освоит векторную алгебру, ситуация может измениться. Таким образом, оценки уровня наглядности и результаты сравнения по наглядности зависят от характера и темпов развития субъекта деятельности, в особенности учебной деятельности.

Заключение

Таким образом, во-первых, понятие модели-полиады удачно формализует ситуацию, когда одни и те же аспекты изучаемого объекта описываются системой существенно различных моделей. Во-вторых, указанная ситуация часто встречается в математических исследованиях и учебных курсах математики. В-третьих, целенаправленное применение моделей-полиад: а) обеспечивает большие возможности для исследования и для организации и осуществления процесса обучения, рационального изменения акцентов в обучении; б) предоставляет дополнительные средства и методы контроля адекватности результатов исследования (в том числе учебного), поскольку использование моделей-полиад позволяет в рамках одного исследования использовать аналитический аппарат существенно различных теорий; в) позволяет улучшать контроль процесса и результатов обучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аменд А. Ф., Худяков В. Н. Математические методы и модели в экономике. Челябинск : Челяб. гос. пед. ун-т, 1999. 368 с.

2. Бестужев-Лада И. В., Варыгин В. Н., Малахов В. А. Моделирование в социологических исследованиях. М. : Наука, 1978. 103 с.

3. Апостел Л. К формальному изучению моделей в неформальных науках // Концепция и роль модели в математике и естественных и социальных науках. Дордрехт : Д. Рейдель, 1961.

4. Мордкович А. Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе. 1996. № 6. С. 28–33.

5. Мордкович А. Г., Тарасов Л. В. Каким быть школьному учебнику? // Математика в школе. 2003. № 8. С. 2–6.

6. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика : Учебное пособие / под ред. Е. И. Смирнова. Ярославль, 2010. 498 с.

7. Тестов В. А. Стратегия обучения в современных условиях // Педагогика. 2005. № 7. С. 12–18.

8. Уемов А. И. Логические основы метода моделирования. М. : Мысль, 1971. 311 с.

9. Мельников Ю. Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей. Екатеринбург : Уральское издательство, 2004. 384 с.

10. Мельников Ю. Б., Ваганова Г. В., Матвеева Е. П. Об определении и оценке адекватности модели // Образование и наука. 2007. № 6 (10). С. 3–14.

11. Мельников Ю. Б. Понятие наглядной модели с позиции теории моделирования // Казанский педагогический журнал. 2016. № 1 (114). Ч. 1. С. 62–69.

12. Мельников Ю. Б. Высшая математика. Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс] : электронное учебное пособие. Архив учебника доступен по URL: http://lib.usue.ru/resource/free/17/MelnikovAlgebra7/index.html (дата обращения: 10.11.2017).

13. Мельникова Н. В., Мельников Ю. Б. Лекции по алгебре : Учебное пособие по курсу «Математика». 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург : Уральское издательство, 2003. 512 с.

14. Мельников Ю. Б. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]. 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург : Изд-во УрГЭУ, 2010. Архив учебника доступен по URL: http://lib.usue.ru/resource/free/10/MelnikovAlgebra3/index.html (дата обращения: 10.11.2017)

15. Мельников Ю. Б. Алгебра и теория чисел: практикум по линейной алгебре, тензорам и полям Галуа : учеб. пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2010. 281 с.

16. Маньшин М. Е. Использование мультимедийных технологий для формирования познавательной самостоятельности // Бизнес. Образование. Право. 2008. № 2 (6). С. 74–76.

REFERENCES

1. Amend A. F., Khudyakov V. N. Mathematical methods and models in economics. Chelyabinsk : Chelyabinsk. State pedagogical University, 1999. 368 p.

2. Bestuzhev-Lada I. V., Varygin V. N., Malakhov V. A. Modeling in sociological research. M. : Nauka, 1978. 103 p.

3. Apostel, L. Towards the Formal Study of Models in the Non-Formal Sciences // The Concept and Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences. Dordrecht : D. Reidel, 1961.

4. Mordkovich A. G. A new concept of the school course of algebra // Mathematics in school. 1996. No. 6. P. 28–33.

5. Mordkovich A. G., Tarasov L. V. What should be the school textbook? // Mathematics in school. 2003. No. 8. P. 2–6.

6. Visual modeling in teaching mathematics: theory and practice : Textbook / ed. E. I. Smirnova. Yaroslavl, 2010. 498 p.

7. Testov V. A. The strategy of teaching in modern conditions // Pedagogic. 2005. No. 7. P. 12–18.

8. Uemov A. I. Logical bases of the modeling method. M. : Mysl, 1971. 311 p.

9. Melnikov Yu. B. Mathematical modeling: structure, algebra of models, training in construction of mathematical models. Yekaterinburg : The Urals Publishing House, 2004. 384 p.

10. Melnikov Yu. B., Vaganova G. V., Matveeva E. P. On definition and estimation of adequacy of model // Education and science. 2007. No. 6 (10). P. 3–14.

11. Melnikov Yu. B. The concept of visual model from the position of the theory of modeling // Kazan Pedagogical Journal. 2016. No. 1 (114). Part 1. P. 62–69.

12. Melnikov Yu. B. Higher mathematics. Linear Algebra and Geometry [Electron resource]: an electronic textbook. The textbook archive is available on URL: http://lib.usue.ru/resource/free/17/MelnikovAlgebra7/index.html (date of viewing: 10.11.2017).

13. Melnikova N. V., Melnikov Yu. B. Lectures on algebra: Handbook on the course «Mathematics». 3rd edition, revised and amended. Yekaterinburg : The Urals Publishing House, 2003. 512 p.

14. Melnikov Yu. B. Algebra and Number Theory [Electronic resource]. 3rd edition, revised and amended. Ekaterinburg : Publishing house of UrGeU, 2010. The textbook archive is available on URL: http://lib.usue.ru/resource/free/10/MelnikovAlgebra3/index.html (date of viewing: 10.11.2017).

15. Melnikov Yu. B. Algebra and Number Theory: Workshop on Linear Algebra, Tensors, and Galois Fields : A Tutorial. Ekaterinburg : Publishing house Ural. state. econ. University, 2010. 281 p.

16. Manshin M. E. Use of multimedia technologies for formation of cognitive independence // Business. Education. Law. 2008. No. 2 (6). P. 74–76.

Как цитировать статью: Мельников Ю. Б., Петров Н. П., Рудная Л. В. Модели-полиады и их роль в обучении математике // Бизнес. Образование. Право. 2018. № 1 (42). С. 267–272.

For citation: Melnikov Yu. B., Petrov N. P., Rudnaya L. V. Models-poliads and their role in training mathematics // Business. Education. Law. 2018. No. 1 (42). P. 267–272.