УДК 330.47
ББК 65в631

Матвеев Роман Иванович,
к. э. н., доцент кафедры математики и информационных технологий,
Кисловодского института экономики и права,
г. Кисловодск,
e-mail: in63@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СПРОСА И НАЛОГОВОЙ ПОЛИТИКИ

OPTIMIZATION OF INVESTMEN PROCESS UNDER CONDITIONS OF RANDOM FLUCTUATION OF DEMAND AND FISCAL POLICY

Разработана модель процесса реальных инвестиций в условиях стохастических изменений спроса и цен на выпускаемую продукцию, случайных изменений инвестиционной политики; оптимизированы инвестиционные решения с учетом специфики технологического процесса и интенсивности износа оборудования. Показано, что в условиях совершенной конкуренции в отрасли оптимальный объем инвестиций увеличивается с ростом волатильности спроса на производимую продукцию, а при олигополистической конкуренции уменьшается с ростом волатильности спроса. Выявлены параметры производственной технологии и товарного рынка, при которых объемы оптимальных инвестиций не зависят от случайных колебаний спроса.

The model of the process of real investments under conditions of stochastic changes of demand and prices for the products and random changes of investment policy has been developed; investment solutions with regards to peculiarities of technological process and equipment depreciation intensity have been optimized. It has been demonstrated that under conditions of perfect competition in the branch the optimal volume of investments is increasing together with the growth of demand volatility to the products; and under conditions of oligopolistic competition it is reduced with the increase of demand volatility. Parameters of production technology and commodity market have been determined, at which the volumes of optimal investments do not depend on the demand random fluctuations.

Ключевые слова: моделирование, инвестиции, спрос, инвестиционная политика, оптимизация, производственная технология, интенсивность износа, конкуренция, волатильность спроса, товарный рынок.

Keywords: modeling, investments, demand, investment policy, optimization, production technology, depreciation intensity, competition, demand volatility, commodity market.

Введение

При экономико-математическом моделировании процессов инвестирования в новый производственный капитал (в создание новых предприятий) важно учитывать ряд принципиальных факторов. Во-первых, необходимо принимать во внимание возможные стохастические колебания спроса и цен на выпускаемую продукцию и инвестиционные ресурсы[1]. Во-вторых, в отличие от процесса инвестирования на финансовом рынке, инвестиции в создание новых предприятий являются, как правило, необратимыми. Помимо этих рисков при моделировании инвестиционного процесса в условиях нестабильной экономики важно учитывать макроэкономическую неопределенность, и прежде всего, неопределенность налоговых условий, в которых будет функционировать предприятие.

1. Моделирование и оптимизация инвестиционного процесса

В этом разделе предложена и исследована модель инвестиционного процесса, которая учитывает перечисленные выше факторы и позволяет исследовать оптимальные инвестиционные решения в условиях неопределенности спроса с представлением возможностей инвестирования в виде опциона. В силу стохастичности спроса на продукцию и ресурсы объем инвестиций представлен как случайный процесс. Полагается, что инвестиции являются мгновенными и необратимыми. Выбор оптимального момента инвестирования сведен к задаче оптимального останова геометрического броуновского движения. Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе информации о наблюдаемых в каждый момент времени ценах выбрать момент инвестирования таким образом, чтобы чистый приведенный доход был максимальным.

Изоэластичную функцию спроса для предприятия-инвестора записываем в следующем виде[2]:

$$p(t) = Y(t)^{(1-\psi)/\psi}\,\mathrm{X}(t) \qquad (1)$$

где переменные p и Y означают соответственно цену и количество проданной продукции, а ψ – эластичность, принимающая минимальное значение $\psi = 1$ в условиях совершенной конкуренции. Стохастический множитель X описывается процессом геометрического броуновского движения с тенденцией μ_x и волатильностью[3] σ_x:

[1] См.: Dixit, A. K. Investment under Uncertainty / A. K. Dixit, R. S. Pindyck. – Princeton: Princeton University Press, 1996; Матвеев, Р. И. Моделирование рыночного лидерства в стохастической дифференциальной игре / Р. И. Матвеев // Современные научные исследования. – 2006. – № 1; Дудов, А. С. Прогнозирование рыночного лидерства в стохастических условиях / А. С. Дудов, Р. И. Матвеев // Экономическое прогнозирование: модели и методы: междунар. науч.-практ. конф. – Воронеж: Изд-во ВГУ. – 2010. – Т. 1.

[2] Romer, D. Advanced Macroeconomics / D. Romer. – New York: McGraw-Hill, 1996.

[3] Волатильность – мгновенное среднее квадратическое отклонение.

$$dX = \mu_x X\,dt + \sigma_x X\,dz \tag{2}$$

где dz – приращение стандартного винеровского процесса. Производственная технология описывается производственной функцией Кобба – Дугласа:

$$Y = \left(AL^{\alpha} K^{1-\alpha}\right)^{\gamma} \tag{3}$$

где L, K, и A представляют собой труд, капитал и параметр, характеризующий технологию соответственно. Параметры α и γ суть постоянная мера доли труда в общем объеме производства и коэффициент отдачи от масштаба соответственно. Прибыль записываем в виде:

$$\Pi = \max\{pY - \omega L\} \tag{4}$$

где ωL – издержки на оплату труда (ω – ставка заработной платы). Максимизация прибыли (4) по L приводит к выражению:

$$\Pi = hX^{\eta_x} K^{\eta_k}$$

в котором параметры η_x, η_k, h и ξ определяются следующим образом:

$$\eta_x = \frac{1}{1-\alpha\xi} > 1 \quad \eta_k = \frac{(1-\alpha)\xi}{1-\alpha\xi} \le 1 \quad \xi = \gamma/\psi$$

$$h = (1-\alpha\xi)\left(\frac{\alpha\xi}{\omega}\right)^{\frac{\alpha\xi}{1-\alpha\xi}} A^{\frac{\xi}{1-\alpha\xi}} > 0$$

Основной капитал предприятия амортизируется с постоянной скоростью δ, так что с учетом инвестиций I закон изменения капитала принимает вид:

$$dK = (I - \delta K)dt \tag{5}$$

Издержки изменения основного капитала складываются из цены единицы вводимого в производство капитала P_k и издержек регулирования $c(I)$, которые предполагаются выпуклыми. Целью предприятия является выбор последовательности инвестиций, максимизирующих ожидаемые дисконтированные доходы инвестора от созданной компании на бесконечном временном горизонте:

$$V = \max_I E\left[\int_0^{\infty}\left(hX^{\eta_x}K^{\eta_k} - Ip_k - c(I)\right)\exp(-rs)ds\right] \tag{6}$$

где r – приемлемый для инвестора уровень ставки процента. Поэтому чистый приведенный доход от созданной компании удовлетворяет следующему уравнению Беллмана:

$$rV = \max_I\left\{hX^{\eta_x}K^{\eta_k} - Ip_k - c(I) + \frac{E[dV]}{dt}\right\} \tag{7}$$

Используя лемму Ито, преобразуем стохастический член $\frac{E[dV]}{dt}$ в уравнении (7) следующим образом:

$$\frac{E[dV]}{dt} = (I - \delta K)\frac{\partial V}{\partial K} + \mu X\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в уравнении (7), получаем:

$$rV = \max_I\left\{hX^{\eta_x}K^{\eta_k} - Ip_k - c(I) + (I - \delta K)\frac{\partial V}{\partial K} + \mu X\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right\} \tag{9}$$

Для определенности будем полагать, что издержки регулирования описываются квадратичной функцией $c = \frac{\gamma}{2}I^2$, а инвестиции являются полностью необратимыми. Максимизируемые члены уравнения (9) суть $-p_k I - \frac{\gamma}{2}I^2 + Iq$, т. е. условие первого порядка принимает вид $-p_k - \gamma I + q = 0$. Поэтому оптимальное инвестирование определяется условием:

$$I^* = \max\left\{\frac{q - p_k}{\gamma}, 0\right\} \tag{10}$$

где $q = \frac{\partial V}{\partial K}$ – параметр Тобина (предельная стоимость единицы введенного капитала или предельное изменение стоимости компании при изменении ее капитала на единицу). Подставляя I^* в виде (10) в уравнение (3.9), получаем:

$$rV = hX^{\eta_x}K^{\eta_k} + \frac{(q - p_k)^2}{2\gamma} - \delta Kq + \mu X\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2}X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \tag{11}$$

при $q > p_k$ (положительное инвестирование) и

$$rV = hX^{\eta_x}K^{\eta_k} + \mu X\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2}X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \tag{12}$$

при $I^* = 0$.

Дальнейший анализ модели проводился численно. Полученные результаты иллюстрируются рис. 1. Из него видно, что при совершенной конкуренции ($\xi = 1$) инвестиции растут с ростом волатильности спроса, при несовершенной конкуренции ($\xi \to 0$) уменьшаются с ростом волатильности спроса, а при значениях ξ, близких к 0,5, волатильность спроса практически не влияет на инвестиции.

2. Необратимые инвестиции в условиях волатильности спроса и налоговой политики

В этом разделе модель инвестирования распространена на ситуации, характеризующиеся случайными изменениями инвестиционной налоговой политики. Изменения политики налогообложения прибыли предприятия будем описывать стационарным процессом Пуассона. Издержки введения капитала в производство определяются функциями $Ip_k(1 - t^H) + c(I)$ и $Ip_k(1 - t^L) + c(I)$, соответствующими состояниям с высоким (t^H) и низким (t^L) уровнем инвестиционной налоговой скидки соответственно. Другими словами, инвестиционная налоговая скидка в каждый в каждый конкретный период может принимать два значения: t^L и t^H, причем $t^L < t^H$. Вероятности перехода λ^L и λ^H могут зависеть от стохастического процесса функции спроса X.

Таким образом, в рассматриваемом случае неопределенность представлена двумя случайными процессами: непрерывным броуновским движением и процессом Пуассона, описывающим скачки.

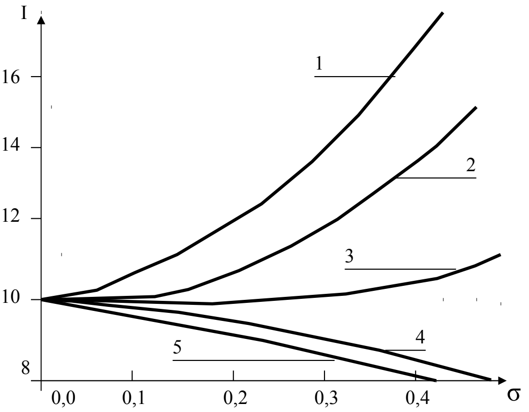

Рис. 1. Инвестиции как функция волатильности спроса при различных степенях рыночной власти: при совершенной конкуренции (ξ = 1) инвестиции растут с ростом волантильности спроса, при несовершенной конкуренции (ξ → 0) уменьшаются с ростом волантильности спроса, а при значениях ξ, близких к 0,5, волатильность спроса практически не влияет на инвестиции. Численные расчеты проведены при следующих параметрах: pk = 1; γ = 0,02; α = 0,7; w = 0,7; A = 1; r = 0,02; δ = 0,1; μ = 0; N = 2; 1- ξ = 1; 2- ξ = 0,8; 3- ξ = 0,6; 4- ξ = 0,3; 5- ξ = 0,1.

Первый случайный процесс непрерывен по времени, а воздействие второго носит дискретный характер. С учетом дополнительного стохастического процесса Пуассона стохастический член $\frac{E[dV]}{dt}$ зависит также и от уровня инвестиционной налоговой скидки:

$$\frac{E[dV]}{dt}=\begin{cases}(I-\delta K)q^{H}+\mu X\dfrac{\partial V^{H}}{\partial X}+\dfrac{1}{2}\sigma^{2}X^{2}\dfrac{\partial^{2}V^{H}}{\partial X^{2}}+\lambda^{H}\left(V^{L}-V^{H}\right)\\(I-\delta K)q^{L}+\mu X\dfrac{\partial V^{L}}{\partial X}+\dfrac{1}{2}\sigma^{2}X^{2}\dfrac{\partial^{2}V^{L}}{\partial X^{2}}+\lambda^{L}\left(V^{H}-V^{L}\right)\end{cases} \quad (13)$$

Оптимальное инвестирование определяется следующим образом:

$$I^{*}=\max\left\{\frac{q-\left(1-t^{i}\right)p_{k}}{\gamma},0\right\},\ i=H,L \quad (14)$$

Имеет место следующее **утверждение** (доказательство здесь не приводится ввиду громоздкости).

Утверждение. *Предельная стоимость единицы введенного капитала не зависит от случайных изменений налоговой политики в случае совершенной конкуренции и постоянной отдачи от масштаба* ($\xi = 1$)*, если* λ^L *и* λ^H *постоянны:*

$$q^{H}=q^{L}=\frac{hX^{\eta x}}{\eta_{x}\mu+\eta_{x}(\eta_{x}-1)\dfrac{1}{2}-\sigma^{2}-(r+\delta)} \quad (15)$$

Из (15) нетрудно усмотреть, что выражение, определяющее оптимальное инвестирование (14), не зависит от переменных t^j и λ^i, определяющих неопределенность инвестиционной налоговой политики.

Далее рассмотрим ситуацию, когда вероятности λ^H и λ^L определяются эндогенно доходностью инвестиций:

$$\lambda^{i}=\begin{cases}0\ при\ X\le-\dfrac{\lambda_{0}^{i}}{\alpha^{i}}\\\lambda_{0}^{i}+\alpha^{i}X\ при\ -\dfrac{\lambda_{0}^{i}}{\alpha^{i}}\le X\le\dfrac{1-\lambda_{0}^{i}}{\alpha^{i}}\\1\ при\ X\ge\dfrac{1-\lambda_{0}^{i}}{\alpha^{i}}\end{cases} \quad (16)$$

Смысл (16) состоит в том, что вероятность для предприятия остаться на прежнем уровне инвестиционной налоговой скидки или перескочить на более высокий уровень инвестиционной налоговой скидки повышается при снижении доходности инвестиций и наоборот. Исследование влияния волатильности налоговой политики на оптимальное инвестирование проведем при постоянном ожидаемом значении спреда $E\left[1-t^{i}\right],\ \ i=H,L.$

Модель (2)–(6) в дискретной форме будет иметь следующий вид. Дифференциальное уравнение (5), описывающее динамику основного капитала, преобразуется в конечно-разностное уравнение:

$$K_{n+1}=(1-\delta)K_{n}+I_{n}$$

Дискретный аналог стохастического процесса (2) представляет собой случайное блуждание $X_n = X_{n-1}\exp\varepsilon$, причем независимая случайная величина ε распределена нормально с математическим ожиданием $\mu-\frac{\sigma^2}{2}$ и дисперсией σ^2. Функция ожидаемого чистого приведенного дохода от созданного предприятия (6) на N – периодическом горизонте определяется следующим образом:

$$V=\max_{I}E\left[\sum_{n=0}^{N}hX_{n}^{\eta x}K_{n}^{\eta x}-I_{n}p_{k}\left(1-t_{n}\right)-c\left(I_{n}\right)\right]$$

На конечном временном горизонте эта задача оптимизации определяется рекуррентными соотношениями:

$$V_{N}\left(X_{N},K_{N}\right)=hX_{n}^{\eta x}\left((1-\delta)K_{N}\right)^{\eta x}$$

$$V_{n}\left(X_{n},K_{n}\right)=$$
$$=\max_{I}\left\{hX_{n}^{\eta x}\left((1-\delta)K_{N}\right)^{\eta x}-I_{n}p_{k}\left(1-t_{n}\right)-c\left(I_{n}\right)+\frac{E\left[V_{n+1}\left(X_{n+1},K_{n+1}\right)\right]}{1+r}\right\}$$

Численные расчеты проведены при следующих параметрах: $p_k = 1$; $\gamma = 0{,}02$; $\alpha = 0{,}7$; $w = 0{,}7$; $A = 1$; $r = 0{,}02$; $\delta = 0{,}1$; $\mu = 0$; $N = 2$, а неопределенность налоговой политики характеризовалась параметром $\frac{0}{X_0}\le\alpha^i\le\frac{1}{X_0}$. Например, при $\alpha^i=\frac{0{,}4}{X_0}$ вероятность изменения уровня инвестиционной налоговой скидки при неизменном спросе равна 0,4.

Результаты численного анализа иллюстрируются рис. 2, 3. На рис. 2 показано оптимальное инвестирование при $\xi = 1$, что соответствует совершенной конкуренции и постоянной отдаче от масштаба; вероятности λ^H и λ^L определяются эндогенно соотношением (16). Из рис. 2 нетрудно видеть, что увеличение волатильности спроса, характеризуемой параметром σ_x, приводит в условиях совершенной конкуренции к росту оптимального инвестирования, что находится в согласии с рис. 1, свидетельствующим о росте оптимального инвестирования при росте волатильности спроса при $\xi = 1$. Кроме того, изменение волатильности налоговой политики при $\xi = 1$ не оказывает влияния на оптимальное инвестирование, что подтверждает аналитический результат **утверждения**. На рис. 3 показана зависимость оптимального инвестирования от волатильности налоговой политики для предприятий, функционирующих при различных степенях рыночной власти ($0 < \xi < 1$). Важным результатом, следующим из рис.3, является несущественное снижение оптимального инвестирования при увеличении волатильности налоговой политики. Этот вывод не зависит от того, задаются ли вероятности перехода к различным уровням инвестиционной налоговой скидки λ^H и λ^L экзогенно (без учета зависимости от прибыльности инвестирования) или эндогенно (с учетом этой зависимости).

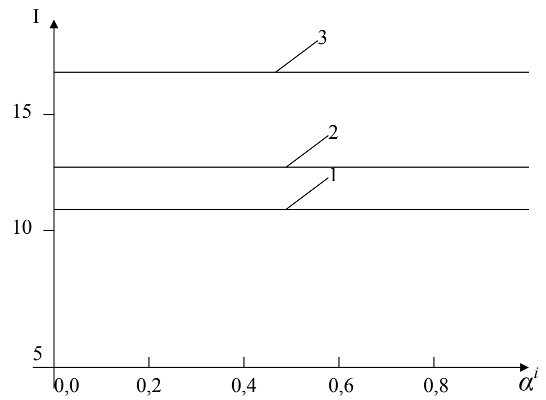

Рис. 2. Оптимальное инвестирование при $\xi = 1$, что соответствует совершенной конкуренции и постоянной отдаче от масштаба; вероятности λH и λL определяются эндогенно соотношением (3.24); pk = 1; γ = 0,02; α = 0,7; w = 0,7; A = 1; r = 0,02; δ = 0,1; μ = 0; N = 2; 1- σ = 0,2; 2- σ = 0,3; 3- σ = 0,5

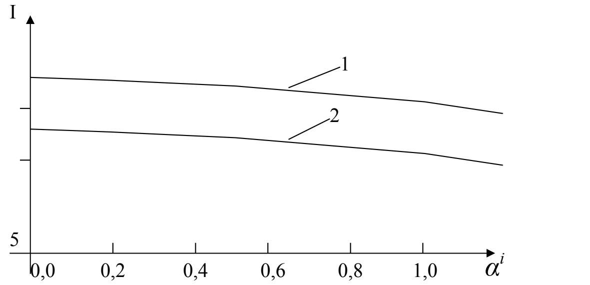

Рис. 3. Зависимость оптимального инвестирования от неопределенности налоговой политики для предприятий, функционирующих при различных степенях рыночной власти ($0 < \xi < 1$); вероятности λ^H и λ^L определяются эндогенно соотношением (3.24); $p_k = 1$; $\gamma = 0{,}02$; $\alpha = 0{,}7$; $w = 0{,}7$; $A = 1$; $r = 0{,}02$; $\delta = 0{,}1$; $\mu = 0$; $N = 2$; 1- $\sigma = 0{,}5$; 2- $\sigma = 0{,}2$

Проведенный анализ показывает, что возможные случайные колебания инвестиционной налоговой политики нельзя считать главными факторами снижения инвестиционной активности, однако снижение волатильности налоговой политики не может значительно усилить инвестиционную активность.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Dixit, A. K. Investment under Uncertainty / A. K. Dixit, R. S. Pindyck. – Princeton: Princeton University Press, 1996.
2. Матвеев, Р. И. Моделирование рыночного лидерства в стохастической дифференциальной игре / Р. И. Матвеев // Современные научные исследования. – 2006. – № 1.
3. Дудов, А. С. Прогнозирование рыночного лидерства в стохастических условиях / А. С. Дудов, Р. И. Матвеев // Экономическое прогнозирование: модели и методы: междунар. науч.-практ. конф. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. – Т. 1.
4. Romer, D. Advanced Macroeconomics / D. Romer. – New York: McGraw-Hill, 1996.

REFERENCES:

1. Dixit, A. K. Investment under Uncertainty / A. K. Dixit, R. S. Pindyck. – Princeton: Princeton University Press, 1996.
2. Matveyev, R. I. Modeling of market leadership at stochastic differential game / R. I. Matveyev // Modern scientific researches. – 2006. – # 1.
3. Dudov, A. S. Forecasting of market leadership in stochastic conditions / A. S. Dudov, R. I. Matveev // Economic forecasting: models and methods: international scientific and practical conference – Voronezh: Publishing house of VGU. – 2010. – Vol. 1.
4. Romer, D. Advanced Macroeconomics / D. Romer. – New York: McGraw-Hill, 1996.