

15. Lockwood M. Creating protective space for innovation in electricity distribution networks in Great Britain: the politics of institutional change. *Environmental Innovation and Societal Transitions*, 2016, no. 18, pp. 111—127.

Как цитировать статью: Суржанинов А. Г. Анализ инновационного развития регионального теплоэнергетического комплекса // Бизнес. Образование. Право. 2021. № 2 (55). С. 122—127. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.214.

For citation: Surzhaninov A. G. Analysis of innovative development of the regional thermal energy complex. *Business. Education. Law*, 2021, no. 2, pp. 122—127. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.214.

УДК 330.11.4:330.3
ББК 65.050

DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.228

Kuznetsov Sergey Borisovich,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Computer Science and Mathematics,
Siberian Institute of Management —
Branch of RANEPА,
Russian Federation, Novosibirsk,
e-mail: sbk@ngs.ru

Кузнецов Сергей Борисович,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры информатики и математики,
Сибирский институт управления —
филиал Российской академии народного хозяйства
и государственной службы,
Российская Федерация, г. Новосибирск,
e-mail: sbk@ngs.ru

Kuligin Evgeny Vyacheslavovich,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Computer Science and Mathematics,
Siberian Institute of Management —
Branch of RANEPА,
Russian Federation, Novosibirsk,
e-mail: kev49@mail.ru

Кулигин Евгений Вячеславович,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры информатики и математики,
Сибирский институт управления —
филиал Российской академии народного хозяйства
и государственной службы,
Российская Федерация, г. Новосибирск,
e-mail: kev49@mail.ru

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАЛОВОГО ПРОДУКТА

INTEGRO-DIFFERENTIAL MODELING OF GROSS PRODUCT

08.00.13 — Математические и инструментальные методы экономики

08.00.13 — Mathematical and instrumental controls of economics

Целью работы является получение аналитической зависимости валового внутреннего продукта от изменения основных факторов производства: трудовых ресурсов, физического капитала и природных ресурсов. Основываясь на аппарате векторного анализа, получено интегро-дифференциальное уравнение изменения валового продукта. Рассмотрены частные случаи уравнения, описывающего стабильный рост валового продукта. Полученное в этом случае уравнение является обобщением теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Инвестирование, ввод в строй оборудования, освоение природных ресурсов, создание человеческого капитала — это явления, которые не происходят мгновенно, а имеют протяженность во времени. Поэтому вывод интегро-дифференциального уравнения основывался на понятии динамической дивергенции и ее свойствах. Динамическая дивергенция позволяет учитывать процессы запаздывания, которые возникают в развитии экономики.

Приводится конечно-разностная модель интегро-дифференциального уравнения. Для получения прогнозного значения валового продукта используются значения валового продукта и основных факторов производства двух предыдущих лет.

Проведено численное моделирование изменения валового внутреннего продукта и валовой добавленной стоимости

в период с 2001 по 2018 г. Полученные результаты дают очень хорошую модель в период стабильного роста экономики, но в кризис и посткризисный период удается только уловить общую динамику развития. Это явление связано с тем, что за временной шаг брался один год, а, согласно теории разностных схем, хороший результат следует ждать только на ежемесячных данных.

Эконометрический аналог уравнения может быть одним из инструментов при прогнозировании валового продукта в краткосрочной перспективе.

The aim of the work is to obtain the analytical dependence of the gross domestic product on changes in the main factors of production: labor resources, physical capital and natural resources. The integro-differential equation of the gross product change was obtained based on the apparatus of vector analysis. Cases of the equation describing the stable growth of the gross product are considered. The equation obtained in this case is a generalization of Lagrange's theorem on finite increments.

Investment, commissioning of equipment, development of natural resources, and creation of human capital — these are phenomena that do not happen instantly, but take a length of time. Therefore, the derivation of the integro-differential equation was based on the concept of dynamic divergence and its

properties. Dynamic divergence allows one to take into account the lag processes that arise in the development of the economy.

A finite-difference model of an integro-differential equation is presented. For the forecast value of the gross product, the values of the gross product and factors of production of the two previous years are used.

Numerical modeling of changes in gross domestic product and gross value added in the period from 2001 to 2018 was carried out. The results obtained provide a very good model in the period of stable economic growth, but in the crisis and post-crisis period it is possible only to capture the general dynamics of development. This phenomenon is due to the fact that the time step was taken for one year; and according to the theory of difference schemes, a good result should be expected only on monthly data.

The econometric analogue of the equation can be one of the tools for forecasting the gross product in the short term.

Ключевые слова: валовой внутренний продукт, основные факторы производства, валовая добавленная стоимость, математическое моделирование, предельная производительность труда, предельная фондоотдача, прирост ВВП, эконометрическая модель, динамическая дивергенция.

Keywords: gross domestic product, main factors of production, gross value added, mathematical modeling, marginal labor productivity, marginal capital productivity, GDP growth, econometric model, dynamic divergence.

Введение

Актуальность. Вопросы прогнозирования развития экономики необходимы для своевременного принятия важных государственных инвестиционных решений, а также для создания набора инструментов экономической политики. Построение моделей для принятия обоснованных решений по ведению экономической политики страны является актуальной задачей.

Изученность проблемы. Решающим условием развития экономики являются инвестиции и инвестиционные стратегии. Этому аспекту посвящен ряд работ [1–10]. Большое внимание в современной научной литературе уделяется вопросу количественного и качественного роста человеческого капитала [11–14]. Природные ресурсы страны являются неоспоримым преимуществом в создании валового внутреннего продукта, но и являются соблазном в развитии сырьевой модели экономики [2, 10, 15, 16]. В работах [17–22] предлагается моделировать ВВП эконометрическими методами с объясняющими факторами: объем потребления электроэнергии, численность безработных, масштабы строительства жилых домов, оборот розничной торговли, уровень платежеспособного спроса для потребления произведенной валовой добавленной стоимости, уровень экспорта, структура экономики региона. Для прогноза изменения ВВП ряд авторов использует классические и модифицированные модели Кобба — Дугласа [23–25]. В ряде статей [10, 16, 26, 27] изучаются причины и способы преодоления замедления экономического роста нашей страны. Турунцева М. Ю. и Чистова М. В. предлагают исчерпывающий обзор современных методов прогнозирования, которые используются в аналитических центрах России [28, 29]. В обзоре Айвазяна С. А. и Бродского Б. Е. представлен мировой опыт эконометрического моделирования социально-экономических систем [30]. В работах Козиновой А. Т. и Никитаева А. Ю. дается количественный

анализ влияния инвестиций, трудовых и природных ресурсов на валовой внутренний продукт [31, 32].

В данной статье разрабатывается интегро-дифференциальная модель, учитывающая уже материализованные в экономике инвестиции.

Основная цель и задачи исследования — разработать экономико-математическую модель, позволяющую определить взаимосвязи между объемом валового продукта и основными факторами производства: физическим капиталом, природными и трудовыми ресурсами, используемыми в производстве.

Научная новизна. Используя аппарат векторного анализа, получено интегро-дифференциальное уравнение, позволяющее определять объем ВВП в зависимости от основных факторов производства.

Теоретическая и практическая значимость. Модельные расчеты ВВП и валовой добавленной стоимости позволяют сделать вывод, что эконометрическая модель интегро-дифференциального уравнения может быть использована как еще один инструмент прогноза развития экономики.

Основная часть

Опишем основные переменные, которые будем использовать при изложении материала. Размеры валового продукта Y указывают на возможности, но не показывают эффективность экономики страны. Более показательной характеристикой эффективности экономики является отношение произведенного валового продукта к затраченным или примененным основным факторам производства, т. е. некоторая усредненная производительность экономики. В наших предположениях валовой продукт можно рассматривать как функцию, непрерывно распределенную в пространстве, с четырьмя степенями свободы: временем t , трудовыми ресурсами L , физическим капиталом K , природными ресурсами H .

Пространство, охарактеризованное набором координат L , K и H (фазовые координаты), называется фазовым пространством, или пространством основных факторов производства. Следует отметить, что фазовое пространство — это множество всех состояний экономической системы в фиксированный момент времени. Каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства, а эволюции экономической системы — перемещение точки. Расширенным фазовым пространством назовем пространство, которому принадлежат координаты L , K , H и t .

Выберем в пространстве факторов производства некоторую точку D с координатами $\vec{r} = (L, K, H, t)$. Величина

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

называется фазовой скоростью, или скоростью развития основных факторов производства.

Произведение используемых факторов производства представляет собой фазовый объем используемых факторов. Обозначим произведение факторов производства $w = L, K, H$, и назовем эту величину фазовым объемом, или просто объемом.

Для каждой точки пространства факторов производства можно определить в каждый момент времени вектор скоростей обновления основных факторов производства:

$$\vec{v} = v_L \vec{i} + v_K \vec{j} + v_H \vec{k},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — базис в пространстве (L, K, H) .

Величина изменения факторов производства за определенный временной интервал определяется из равенства $|\bar{v}| = \sqrt{(v_L)^2 + (v_K)^2 + (v_H)^2}$. Для того чтобы задать векторное поле изменения факторов производства (пространство состояний экономики), можно потребовать задание скорости в некоторый определенный промежуток времени или указать направления вектора скорости без учета его величины. То есть необходимо построить семейство линий, касательные к которым в каждой точке пространства факторов производства будут совпадать в данный момент времени с направлением изменения факторов производства в этой точке. Такие линии для поля скоростей обновления факторов производства называются линиями развития этих факторов, а в случае произвольного векторного поля экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$ — линией развития этого показателя.

Выберем в пространстве основных факторов производства замкнутый контур C , который образует некоторое сечение S_1 . В этом сечении будем брать начальные условия для экономических объектов и построим линию развития факторов производства для этих экономических объектов (рис. 1).

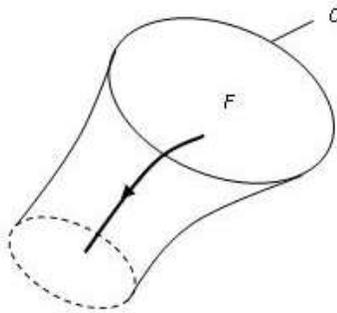


Рис. 1. Коридор развития экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$

Получим некоторый коридор, который назовем коридором развития экономики. Последнее сечение коридора обозначим S_2 . Очевидно, коридор развития имеет то свойство, что через его боковую границу линии развития не проходят. Следует отметить, что подобные коридоры развития можно построить для любого векторного экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$. Но для того, чтобы не вводить новые понятия и не загромождать рассуждения, все их будем называть коридорами развития экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$.

Возьмем в пространстве факторов производства некоторую поверхность S . Найдем интеграл вектора экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$ по этой поверхности или, другими словами, поток вектора $\bar{F}(\bar{r}, t)$ через поверхность S . Для этого во всех точках поверхности определим единичные вектора нормали \bar{n} .

Предположим, что в некоторой точке поверхности D определены векторный экономический показатель $\bar{F}(\bar{r}, t)$ и его нормальная составляющая:

$$F_n(\bar{r}, t) = \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot \bar{n} = F_L \cos(n, L) + F_K \cos(n, K) + F_H \cos(n, H).$$

Представим поверхность S в виде большого числа малых элементов ΔS , которые можно представить вектором, который направлен по нормали к элементу, и равным площади этого элемента. Действительно, пусть ΔS имеет

контур C , не лежащий в одной плоскости факторов производства. Спроектируем контур C на три плоскости HK, HL, KL и получим, соответственно, три площадки с контурами C_L, C_K и C_H , которые могут быть представлены векторами $\Delta S_L \bar{i}, \Delta S_K \bar{j}, \Delta S_H \bar{k}$. Тогда:

$$\Delta \bar{S} = \Delta S_L \bar{i} + \Delta S_K \bar{j} + \Delta S_H \bar{k}.$$

В общем случае рассмотрим поверхность, состоящую из факторов производства S , которая может быть представлена вектором $\bar{S} = S\bar{n}$, где \bar{n} — вектор нормали к поверхности S .

Для каждого элемента найдем скалярные произведения $\bar{F}(\bar{r}, t) \cdot \Delta \bar{S}$, которые просуммируем по всем элементам. Полученная сумма будет стремиться к конечному пределу, при стремлении к нулю всех элементов поверхности факторов производства. Полученный предел называется потоком векторного экономического показателя $\bar{F}(\bar{r}, t)$ через заданную поверхность S и обозначается

$$\int \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot \Delta \bar{S}.$$

Поток экономического показателя через поверхность S представим в виде

$$\begin{aligned} \int_S \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} &= \int_S F_n(\bar{r}, t) d\bar{S} = \int_S \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot \bar{n} dS = \\ &= \int_S (F_L \cos(n, L) + F_K \cos(n, K) + F_H \cos(n, H)) dS. \end{aligned}$$

Аналогично можно ввести понятие интегрирования по объему. Последнее равенство можно записать так:

$$\int_S \bar{F}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} = \int_S (F_L dKdH + F_K dLdH + F_H dKdL),$$

понимая, например, под $dKdH$ проекцию элемента $d\bar{S}$ на плоскость KH , взятую с надлежащим знаком.

В работе [33] было доказано следующее утверждение.

Пусть компоненты скорости обновления факторов производства зависят от влияния всех факторов производства. Тогда для любого непрерывного и имеющего первые непрерывные производные внутри коридора развития, а также в начальный и конечный моменты времени векторного экономического показателя, зависящего от факторов производства, верна формула

$$\int_{\Gamma} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_w \left(\frac{\partial F_L}{\partial L} + \frac{\partial F_K}{\partial K} + \frac{\partial F_H}{\partial H} + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_L}{\partial t} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_K}{\partial t} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_H}{\partial t} \right) dV = \int_w \nabla_i \cdot \bar{F} dV, \quad (1)$$

где Γ — вся поверхность w , а под знаком ∇_i понимается динамический оператор Гамильтона:

$$\nabla_i = \left(\frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial L}, \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial K}, \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial H} \right) = DIV;$$

точка между векторами $\nabla_i \cdot \bar{F}$ означает скалярное произведение.

Частным случаем этого уравнения может быть получение уравнения для вектора производительности экономики:

$$\bar{F}(\bar{r}, t) = \left(\frac{\partial Y}{\partial L}, \frac{\partial Y}{\partial K}, \frac{\partial Y}{\partial H} \right) = \text{grad} Y.$$

Его направление совпадает с направлением наибольшего роста валового продукта. Градиент перпендикулярен поверхности уровня $Y = \text{const}$ в каждой точке.

Тогда для вектора производительности потока основных факторов производства экономики, с учетом отсутствия пересечения боковых поверхностей и из равенства (1), имеем следующее:

$$\begin{aligned} \int_w \text{DIV}(\text{grad} Y(\bar{r}, t)) dV &= \int_{\Gamma} \text{grad} Y(\bar{r}, t) \cdot d\bar{S} = \\ &= \int_{S^1} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right) - \\ &- \int_{S^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{r}_i = (L_i, K_i, H_i)$ — лежащие в сечениях S_1 и S_2 , $i = 1, 2$.

Докажем следующее равенство:

$$\text{DIV}(\text{grad} Y(\bar{r}, t)) = \Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \left(\bar{v} \cdot \frac{\partial(\text{grad} Y)}{\partial t} \right),$$

где $\Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial H^2}$ — оператор Лапласа.

Действительно, распишем подробно все компоненты статического градиента и динамической дивергенции:

$$\begin{aligned} \text{DIV}(\text{grad} Y(\bar{r}, t)) &= \\ &= \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial L} + \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial K} + \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial H} + \frac{\partial^2 Y}{\partial H^2} = \\ &= \Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \left(\bar{v} \cdot \frac{\partial(\text{grad} Y)}{\partial t} \right) = \Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \left(\bar{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) \right). \end{aligned}$$

На основании последней формулы и формулы (2) заключаем, что

$$\text{DIV}(\text{grad} Y(\bar{r}, t)) = \Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \left(\bar{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) \right) = \Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \frac{d^2 Y}{dt^2}. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) имеем уравнение

$$\begin{aligned} \int_w \left(\Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} \right) dLdKdH &= \int_{S^1} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right) - \\ &- \int_{S^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right). \end{aligned}$$

Последнее уравнение рассматривается в коридоре развития (см. рис. 1). В качестве граничных и начальных условий возьмем известный валовой продукт $Y(\bar{r}_1)$ в некоторый момент времени t_1 при известных значениях факторов

производства \bar{r}_1 , т. е. на известном сечении коридора развития. В момент t_2 нам неизвестны \bar{r}_2 и $Y(\bar{r}_2)$, и окончательно получаем интегро-дифференциальное уравнение вычисления валового продукта через изменения факторов производства:

$$\begin{aligned} \int_w \left(\Delta Y + \frac{1}{|\bar{v}|^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} \right) dLdKdH + \int_{S^1} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right) = \\ = \int_{S^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В частном случае, когда прирост валового продукта остается постоянным во времени $\left(\frac{dY}{dt} = \text{const} \right)$ при используемых факторах производства, последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_w \Delta Y dLdKdH + \int_{S^1} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right) = \\ = \int_{S^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dKdH + \frac{\partial Y}{\partial K} dLdH + \frac{\partial Y}{\partial H} dLdK \right). \end{aligned}$$

В частном случае, когда валовой продукт зависит только от одного фактора производства, последнее равенство является обобщением теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Рассмотрим разностный аналог уравнения (4):

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Y_{i-1}}{h_{i-1}^K (h_i^K + h_{i-1}^K)} + \frac{2Y_{i+1}}{h_i^K (h_i^K + h_{i-1}^K)} + \frac{2Y_{i-1}}{h_{i-1}^L (h_i^L + h_{i-1}^L)} + \frac{2Y_{i+1}}{h_i^L (h_i^L + h_{i-1}^L)} + \right. \\ \left. + \frac{2Y_{i-1}}{h_{i-1}^H (h_i^H + h_{i-1}^H)} + \frac{2Y_{i+1}}{h_i^H (h_i^H + h_{i-1}^H)} - Y_i \left(\frac{2}{h_{i-1}^K h_i^K} + \frac{2}{h_{i-1}^L h_i^L} + \frac{2}{h_{i-1}^H h_i^H} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Y_{i-1} + Y_{i+1} - 2Y_i}{(h_i^K)^2 + (h_i^L)^2 + (h_i^H)^2} \right) h_i^K h_i^L h_i^H + Y_{i+1} \left(\frac{h_i^K}{h_i^L} h_i^H + \frac{h_i^K}{h_i^H} h_i^L + \frac{h_i^L}{h_i^K} h_i^H \right) - \\ - Y_i \left(\frac{h_i^K}{h_i^L} h_i^H + \frac{h_i^K}{h_i^H} h_i^L + \frac{h_i^L}{h_i^K} h_i^H \right) = Y_i \left(\frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^L} h_{i-1}^H + \frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^H} h_{i-1}^L + \frac{h_{i-1}^L}{h_{i-1}^K} h_{i-1}^H \right) - \\ - Y_{i-1} \left(\frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^L} h_{i-1}^H + \frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^H} h_{i-1}^L + \frac{h_{i-1}^L}{h_{i-1}^K} h_{i-1}^H \right) \end{aligned}$$

$$h_i^K = K_{i+1} - K_i, \quad h_i^L = L_{i+1} - L_i, \quad h_i^H = H_{i+1} - H_i.$$

После преобразования имеем: $Y_{i+1} = \frac{B}{A} Y_i - \frac{C}{A} Y_{i-1}$,

где индекс i — номер года (квартал, месяц), например K_i — объем основных фондов в i -м году, L_i — объем трудовых ресурсов в i -м году, H_i — объем природных ресурсов, используемых в i -м году:

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{2}{h_i^K (h_i^K + h_{i-1}^K)} + \frac{2}{h_i^L (h_i^L + h_{i-1}^L)} + \frac{2}{h_i^H (h_i^H + h_{i-1}^H)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{h_i^H (h_i^H + h_{i-1}^H)} + \frac{1}{(h_i^K)^2 + (h_i^L)^2 + (h_i^H)^2} \right) h_i^K h_i^L h_i^H + \\ + \left(\frac{h_i^K}{h_i^L} h_i^H + \frac{h_i^K}{h_i^H} h_i^L + \frac{h_i^L}{h_i^K} h_i^H \right) \end{aligned}$$

Результаты

Проводилось моделирование валовой добавленной стоимости в основных ценах, измеренной в триллионах рублей [34].

Расчет (рис. 2) показал, что, зная поведение факторов производства и валовую добавленную стоимость за предыдущее два года, можно довольно хорошо предсказывать поведение валовой добавленной стоимости на следующий год. Анализ графика показывает, что наибольшая ошибка возникла в кризисный и посткризисный период экономики.

Используем этот же алгоритм для моделирования валового внутреннего продукта (рис. 3).

$$B = \left(\frac{2}{h_{i-1}^K h_i^K} + \frac{2}{h_{i-1}^L h_i^L} + \frac{2}{h_{i-1}^H h_i^H} + \frac{2}{(h_i^K)^2 + (h_i^L)^2 + (h_i^H)^2} \right) h_i^K h_i^L h_i^H + \left(\frac{h_i^K}{h_i^L} h_i^H + \frac{h_i^K}{h_i^H} h_i^L + \frac{h_i^L}{h_i^K} h_i^H \right) + \left(\frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^L} h_{i-1}^H + \frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^H} h_{i-1}^L + \frac{h_{i-1}^L}{h_{i-1}^K} h_{i-1}^H \right)$$

$$C = \left(\frac{2}{h_{i-1}^K (h_i^K + h_{i-1}^K)} + \frac{2}{h_{i-1}^L (h_i^L + h_{i-1}^L)} + \frac{2}{h_{i-1}^H (h_i^H + h_{i-1}^H)} + \frac{1}{(h_i^K)^2 + (h_i^L)^2 + (h_i^H)^2} \right) h_i^K h_i^L h_i^H + \left(\frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^L} h_{i-1}^H + \frac{h_{i-1}^K}{h_{i-1}^H} h_{i-1}^L + \frac{h_{i-1}^L}{h_{i-1}^K} h_{i-1}^H \right)$$

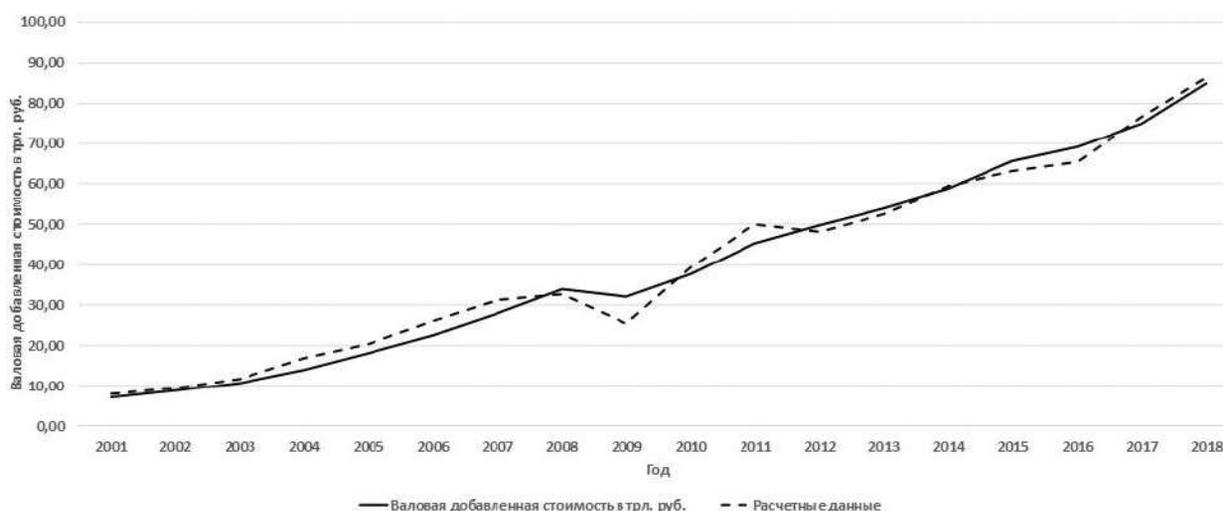


Рис. 2. Моделирование валовой добавленной стоимости РФ

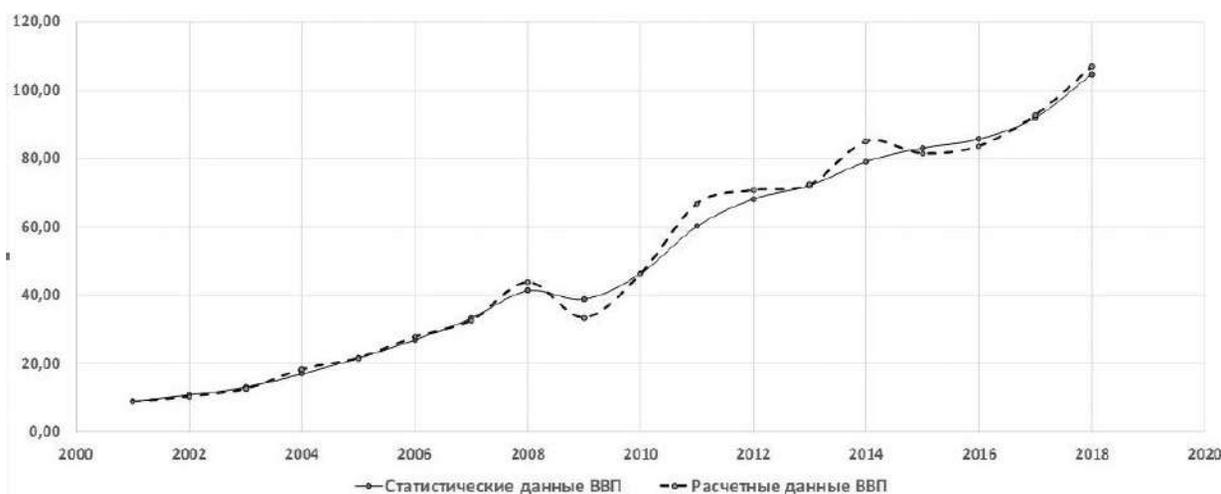


Рис. 3. Моделирование валовой внутреннего продукта

В обоих случаях наблюдается некоторое несоответствие статистическим данным, это объясняется большим временным шагом (один год). При моделировании на месячных данных расхождение станет достаточно приемлемым.

Выводы и заключение

Получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее связь валового внутреннего продукта с основными факторами производства: физическим капиталом, трудовыми ресурсами и используемыми природными ресурсами. На базе этого уравнения построена эконо-

метрическая модель, которая показывает применимость результатов работы для краткосрочного прогнозирования валового внутреннего продукта и валовой добавленной стоимости.

Для правильного понимания полученных экономических соотношений необходимо учитывать, что это только приближения, и более грубые, чем в естественных науках, «ибо экономика имеет дело с постоянно меняющимися, очень тонкими свойствами человеческой природы» [35] и ее зависимость от человеческого фактора приводит к неточности получаемых соотношений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бувальцева В. И., Федулова Е. А., Алабина Т. А. Оценка реализации инвестиционной стратегии территории как целевого ориентира устойчивого экономического роста на основе корреляционно-регрессионного анализа // Сибирская финансовая школа. 2014. № 6. С. 9—15.
2. Глазьев С. Ю. О стратегии и концепции социально-экономического развития России до 2020 года // Экономика региона. 2008. № 3. С. 14—27.
3. Глазьев С. Ю., Фетисов Г. Г. О стратегии устойчивого развития экономики России // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2013. № 1. С. 23—35.
4. Косинцев А. П., Фальченко О. Д. Анализ критериев транснациональности международных корпораций // Известия УрГЭУ. 2009. № 3. С. 42—46.
5. Скуфьина Т. П., Баранов С. В., Корчак Е. А. Оценка влияния динамики инвестиций на рост валового регионального продукта в регионах Севера и Арктической зоны Российской Федерации // Вопросы статистики. 2018. № 6. С. 25—35. URL: <https://voprstat.elpub.ru/jour/article/view/695/576>.
6. Ускова Т. В. О роли инвестиций в обеспечении устойчивого экономического роста // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2013. № 6. С. 45—59.
7. Фальченко О. Д. Исследование зависимости экономики России от прямых инвестиций ТНК на основе эконометрических моделей // Управленец. 2014. № 3. С. 12—18.
8. Состоится ли новая модель экономического роста в России? / Е. Г. Ясин, Н. В. Акиндинова, Л. И. Якобсон, А. А. Яковлев // Вопросы экономики. 2013. № 5. С. 4—39.
9. Акран Е. A. Modeling regression with time series errors of gross domestic product on government expenditure // International Journal of Innovation and Applied Studies. 2016. Vol. 18. No. 4. Pp. 990—996. URL: <https://www.researchgate.net/publication/319077304>.
10. Durand-Lasserve O., Hansjörg B. Drivers of regional growth in Russia: a baseline model with application // OECD Economics Department Working Papers No. 1523, 2018.
11. Вакуленко Е. С., Гурвич Е. Т. Взаимосвязь ВВП, безработицы и занятости: углубленный анализ закона Оукена для России // Вопросы экономики. 2015. № 3. С. 5—27.
12. Овчинникова Т. И., Полянская И. Л., Еремина Т. А. Взаимосвязь экономического роста и развития человеческого капитала // Транспортное дело России. 2010. № 9. С. 68—73.
13. Marrero G., Rodríguez J. Inequality of opportunity and growth // Journal of Development Economics. 2013. No. 104. Pp. 107—122.
14. Growth in Regions / N. Gennaioli, R. la Porta, F. L. de Silanes, A. Shleifer // Journal of Economic Growth. 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 259—309. URL: <https://doi.org/10.1007/s10887-014-9105-9>.
15. Бодрунов С. Д. Ресурсные преимущества России как основа высокотехнологического экономического роста // Экономическое возрождение России. 2014. № 4. С. 24—31.
16. Новая экономическая политика — политика экономического роста / В. В. Ивантер, М. Н. Узяков, М. Ю. Ксенофонтов, А. А. Широков, В. С. Панфилов, О. Д. Говтвань, Д. Б. Кувалин, Б. Н. Порфирьев // Проблемы прогнозирования. 2013. № 6. С. 3—16.
17. Баенхаева А. В., Базилевский М. П., Носков С. И. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания регрессивных параметров // Фундаментальные исследования. 2016. № 10-1. С. 9—14.
18. Бакуменко Л. П., Костромина Е. В. Эконометрическое моделирование экономического роста Республики Марий Эл // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2016. № 12. С. 30—36. URL: http://intellekt-izdanie.osu.ru/arch/12_2016_postranichno-1.pdf.
19. Волкова Е. Н., Карманов М. В. Моделирование социально-экономического развития регионов // Статистика и экономика. 2016. № 3. С. 55—59. URL: <https://statecon.rea.ru/jour/article/view/67/49>.
20. Ивченко Ю. С. Определение основных факторов уровня валового регионального продукта методами эконометрического моделирования по совокупности регионов Российской Федерации // Статистика и экономика. 2019. Т. 16. № 6. С. 4—18. URL: <https://doi.org/10.21686/2500-3925-2019-6-4-18>.
21. Панкова С. В., Цыпин А. П. Моделирование влияния социально-экономических факторов на валовой региональный продукт // Экономический анализ: теория и практика. 2015. № 45. С. 2—14. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_24870205_85551278.pdf.
22. Demidova O., Ivanov D. Models of economic growth with heterogenous spatial effects: the case of Russian regions // HSE Economic Journal. 2016. Vol. 20. No. 1. Pp. 52—75.
23. Алферова Т. В., Третьякова Е. А. Производственная функция экономики регионов: пример Уральского экономического района // Известия УрГЭУ. 2018. Т. 19. № 5. С. 72—82.
24. Пьянкова А. В., Дорохова Е. И. Методические подходы к оценке влияния отдельных факторов на состояние и тенденции социально-экономического развития региона // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 5. С. 386—394. URL: <https://www.science-education.ru/pdf/2013/5/90.pdf>.
25. Анализ факторов роста ВРП Алтайского края с помощью эконометрических моделей / Т. П. Селиверстова, П. И. Кузьмин, С. И. Селиверстов, С. В. Шаповалова // Управление экономическими системами. 2017. № 5(99). URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_29206470_93645455.pdf.
26. Гайдар Е. Т. Кризис и Россия // Экономическая политика. 2009. № 6. С. 6—19.

27. Кудрин А. Л., Гурвич Е. Т. Новая модель роста для российской экономики // Вопросы экономики. 2014. № 12. С. 4—36.
28. Турунцева М. Ю. Прогнозирование в России: обзор основных моделей // Экономическая политика. 2011. № 1. С. 193—202. URL: <http://www.fin-izdat.ru/journal/analiz>.
29. Чистова М. В. Методы и модели прогнозирования объемов валового регионального продукта // Вестник Адыгейского государственного университета. 2014. № 1. С. 105—114. URL: <http://vestnik.adygnet.ru/files/2014.1/3131/105-114.pdf>.
30. Айвазян С. А., Бродский Б. Е. Макроэкономическое моделирование: подходы, проблемы, пример эконометрической модели российской экономики // Прикладная эконометрика. 2006. № 2. С. 85—111.
31. Козина А. Т. Эконометрический анализ валового внутреннего продукта России и его взаимосвязей с инвестициями в основной капитал, численностью занятого в экономике населения, добычей нефти и газа // Экономический анализ: теория и практика. 2016. № 2. С. 183—196.
32. Никитаева А. Ю., Маслоукова Е. В. Ростоформирующие факторы стратегического развития регионов Юга России: инструментарий оценки // Региональная экономика. Юг России. 2017. № 3(17). С. 131—139. URL: http://re.volsu.ru/1_Nikitaeva_i_dr.pmd.pdf.
33. Кузнецов С. Б. Моделирование поведения экономических показателей // Вестник Челябин. гос. ун-та. 2011. № 16(231). С. 41—43.
34. Регионы России. Социально-экономические показатели : стат. сб. URL: http://old.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156.
35. Маршалл А. Принципы экономической науки : в 3 т. Т. 3 / Пер. с англ. М. : Прогресс, 1993. С. 210—211.

REFERENCES

1. Buvaltseva V. I., Fedulova E. A., Alabina T. A. Assessment of the implementation of the investment strategy of the territory as a target of sustainable economic growth based on correlation-regression analysis. *Siberian Financial School*, 2014, no. 6, pp. 9—15. (In Russ.)
2. Glazyev S. Yu. On the strategy and concept of socio-economic development of Russia until 2020. *Economy of Region*, 2008, no. 3, pp. 14—27. (In Russ.)
3. Glazyev S. Yu., Fetisov G. G. On the strategy of sustainable development of the Russian economy. *Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast*, 2013, no. 1, pp. 23—35. (In Russ.)
4. Kosintsev A. P., Falchenko O. D. Analysis of the criteria for the transnationality of international corporations. *Journal of the Ural State University of Economics*, 2009, no. 3, pp. 42—46. (In Russ.)
5. Skufina T. P., Baranov S. V., Korchak E. A. Assessment of the impact of investment dynamics on the growth of gross regional product in the regions of the North and the Arctic zone of the Russian Federation. *Voprosy statistiki*, 2018, no. 6, pp. 25—35. URL: <https://vopstat.elpub.ru/jour/article/view/695/576>. (In Russ.)
6. Uskova T. V. On the role of investments in ensuring sustainable economic growth. *Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast*, 2013, no. 6, pp. 45—59. (In Russ.)
7. Falchenko O. D. Research of the dependence of the Russian economy on direct investment of TNCs based on econometric models. *The Manager*, 2014, no. 3, pp. 12—18. (In Russ.)
8. Yasin E. G., Akindinova N. V., Yakobson L. I., Yakovlev A. A. Will there be a new model of economic growth in Russia? *Voprosy Ekonomiki*, 2013, no. 5, pp. 4—39. (In Russ.)
9. Akpan E. A. Modeling regression with time series errors of gross domestic product on government expenditure. *International Journal of Innovation and Applied Studies*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 990—996. URL: <https://www.researchgate.net/publication/319077304>.
10. Durand-Lasserve O., Hansjörg B. Drivers of regional growth in Russia: a baseline model with application. *OECD Economics Department Working Papers*, 2018, no. 1523.
11. Vakulenko E. S., Gurvich E. T. Interrelation of GDP, unemployment and employment: an in-depth analysis of Okun's law for Russia. *Voprosy Ekonomiki*, 2015, no. 3, pp. 5—27. (In Russ.)
12. Ovchinnikova T. I., Polyanskaya I. L., Eremina T. A. Interrelation of economic growth and development of human capital. *Transport business of Russia*, 2010, no. 9, pp. 68—73. (In Russ.)
- Marrero G., Rodríguez J. Inequality of opportunity and growth. *Journal of Development Economics*, 2013, no. 104, pp. 107—122.
- Gennaioli N., La Porta R., Lopez De Silanes F., Shleifer A. Growth in Regions. *Journal of Economic Growth*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 259—309. URL: <https://doi.org/10.1007/s10887-014-9105-9>.
15. Bodrunov S. D. Resource advantages of Russia as the basis of high-tech economic growth. *Economic revival of Russia*, 2014, no. 4, pp. 24—31. (In Russ.)
16. Ivantsev V. V., Uzyakov M. N., Ksenofontov M. Yu., Shirov A. A., Panfilov V. S., Govtvan O. D., Kuvalin D. B., Porfiriev B. N. New economic policy — the policy of economic growth. *Studies on Russian Economic Development*, 2013, no. 6, pp. 3—16. (In Russ.)
17. Baenkhayeva A. V., Bazilevsky M. P., Noskov S. I. Modeling of the gross regional product of the Irkutsk region based on the application of the method of multiple estimation of regressive parameters. *Fundamentalnye issledovaniya. [Fundamental research]*, 2016, no. 10-1, pp. 9—14 (In Russ.)
18. Bakumenko L. P., Kostromina E. V. Econometric modeling of economic growth of the Republic of Mari El. *Intellect. Innovations. Investments*, 2016, no. 12, pp. 30—36. URL: http://intellekt-izdanie.osu.ru/arch/12_2016_postranichno-1.pdf. (In Russ.)

19. Volkova E. N., Karmanov M. V. Modeling the socio-economic development of regions. *Statistics and Economics*, 2016, no. 3, pp. 55—59. URL: <https://statecon.rea.ru/jour/article/view/67/49>. (In Russ.)
20. Ivchenko Yu. S. Determination of the main factors of the level of gross regional product by methods of econometric modeling for the aggregate of regions of the Russian Federation. *Statistics and Economics*, 2019, vol. 16, no. 6, pp. 4—18. URL: <https://doi.org/10.21686/2500-3925-2019-6-4-18>. (In Russ.)
21. Pankova S. V., Tsyplin A. P. Modeling the influence of socio-economic factors on the gross regional product. *Economic analysis: theory and practice*, 2015, no. 45, pp. 2—14. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_24870205_85551278.pdf. (In Russ.)
22. Demidova O., Ivanov D. Models of economic growth with heterogenous spatial effects: the case of Russian Regions. *HSE Economic Journal*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 52—75.
23. Alferova T. V., Tretyakova E. A. The production function of the regional economy: an example of the Ural economic region. *Journal of the Ural State University of Economics*, 2018, vol. 19, no. 5, pp. 72—82. (In Russ.)
24. Pyankova A. V., Dorokhova E. I. Methodical approaches to assessing the influence of individual factors on the state and trends of socio-economic development of the region. *Modern Problems of Science and Education*, 2013, no. 5, pp. 386—394. URL: <https://www.science-education.ru/pdf/2013/5/90.pdf>. (In Russ.)
25. Seliverstova T. P., Kuzmin P. I., Seliverstov S. I., Shapovalova S. V. Analysis of the growth factors of the GRP of the Altai Territory using econometric models. *Upravlenie jekonomicheskimi sistemami. [Management of economic systems]*, 2017, no. 5(99). URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_29206470_93645455.pdf. (In Russ.)
26. Gaidar E. T. Crisis and Russia. *Economic policy*, 2009, no. 6, pp. 6—19. (In Russ.)
27. Kudrin A. L., Gurvich E. T. A new growth model for the Russian economy. *Voprosy Ekonomiki*, 2014, no. 12, pp. 4—36. (In Russ.)
28. Turuntseva M. Yu. Forecasting in Russia: an overview of the main models. *Economic policy*, 2011, no. 1, pp. 193—202. URL: <http://www.fin-izdat.ru/journal/analiz>. (In Russ.)
29. Chistova M. V. Methods and models for forecasting the volume of the gross regional product. *The Bulletin of the Adyghe State University: Internet Scientific Journal*, 2014, no. 1, pp. 105—114. URL: <http://vestnik.adygnet.ru/files/2014.1/3131/105-114.pdf>. (In Russ.)
30. Ayvazyan S. A., Brodsky B. E. Macro-economic modeling: approaches, problems, an example of an econometric model of the Russian economy. *Applied Econometrics*, 2006, no. 2, pp. 85—111. (In Russ.)
31. Kozinova A. T. Econometric analysis of the gross domestic product of Russia and its relationship with investments in fixed assets, the number of people employed in the economy, oil and gas production. *Economic analysis: theory and practice*, 2016, no. 2, pp. 183—196. (In Russ.)
32. Nikitaeva A. Yu., Maslyukova E. V. Growth-forming factors of strategic development of the regions of the South of Russia: assessment tools. *Regional Economy. South of Russia*, 2017, no. 3(17), pp. 131—139. URL: http://re.volsu.ru/1_Nikitaeva_idr.pmd.pdf. (In Russ.)
33. Kuznetsov S. B. Modeling the behavior of economic indicators. *Bulletin of Chelyabinsk State University*, 2011, no. 16(231), pp. 41—43. (In Russ.)
34. *Regions of Russia. Socio-economic indicators. Statistical collection.* (In Russ.) URL: http://old.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156.
35. Marshall A. *Principles of Economic Science*. In 3 volumes. Vol. 3. Trans. from English. Moscow, Progress, 1993. Pp. 210—211. (In Russ.)

Как цитировать статью: Кузнецов С. Б., Кулигин Е. В. Интегро-дифференциальное моделирование валового продукта // Бизнес. Образование. Право. 2021. № 2 (55). С. 127—134. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.228.

For citation: Kuznetsov S. B., Kuligin E. V. Integro-differential modeling of gross product. *Business. Education. Law*, 2021, no. 2, pp. 127—134. DOI: 10.25683/VOLBI.2021.55.228.