Научная статья
УДК 33.519,8
DOI: 10.25683/VOLBI.2024.67.1015

Alexandr Alexandrovich Makhin
Postgraduate student of the Department of Mathematics
and Natural Sciences,
scientific specialty 5.2.2 — Mathematical, statistical
and instrumental methods in economics,
Novosibirsk State University of Economics and Management
Novosibirsk, Russian Federation
kislik0fist@mail.ru

Александр Александрович Махин
аспирант кафедры математики и естественных наук,
научная специальность 5.2.2 — Математические, статистические
и инструментальные методы в экономике,
Новосибирский государственный университет экономики
и управления «НИНХ»
Новосибирск, Российская федерация
kislik0fist@mail.ru

УМЕНЬШЕНИЕ ЭНТРОПИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЛЕКСНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА В ВИДЕ НОРМАЛИЗОВАННОГО СРЕДНЕГО МНОГОЧЛЕНА

5.2.2 — Математические, статистические и инструментальные методы в экономике

Аннотация. *Статья посвящена проблеме построения рейтингов однородных объектов по качеству с учетом нескольких частных качеств, для чего предлагается использовать агрегирующие, идемпотентные, строго монотонные, сдвиг-инвариантные многочлены в соответствии с методикой, изложенной Д. Б. Зотьевым в работах «О нормализованных средних критериях, интерполирующих экспертные оценки» и «Нормализованные средние и проблема свертывания показателей качества». Целью исследования является построение квадратичного среднего многочлена и моделирование с его помощью общего потребительского рейтинга смартфонов по семи частным качествам. При построение квадратичного среднего многочлена необходимо назначать экспертные оценки на каждой итерации согласно предложенному в работе методу, тем самым сужая диапазон экспертной оценки для всех последующих элементов тестовой совокупности; доказать практическую применимость метода уменьшения неопределенности в процессе проведения экспертизы. Для проведения исследования выбрана репрезентативная выборка и построены частные рейтинги по показателям качества данной тестовой совокупности. По аналогии с экспертно-статистическим методом определения весовых коэффициентов найдены коэффициенты среднего многочлена степени 2, аппроксимирующего экспертные оценки комплексного качества. В результате исследования доказана практическая применимость метода уменьшения неопределенности в процессе проведения экспертизы. Произведено сравнение результатов, полученных при использовании метода уменьшения неопределенности в процессе экспертизы и экспертно-статистического метода. Подробно рассмотрен пример конструирования квадратичного среднего многочлена, который значительно увеличивает число подбираемых параметров комплексного показателя качества. Предложена рекомендация по развитию данной методики с целью доведения ее объективности до уровня принятия ответственных решений.*

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, нормализованная средняя функция, сдвиг-инвариантный многочлен, агрегирующий оператор, весовой коэффициент, комплексный показатель, интегральный показатель, экспертная оценка, функциональный вес, принятие решений*

Для цитирования: Махин А. А. Уменьшение энтропии экспертных оценок при использовании комплексного показателя качества в виде нормализованного среднего многочлена // Бизнес. Образование. Право. 2024. № 2(67). С. 158—165. DOI: 10.25683/VOLBI.2024.67.1015.

Original article

REDUCING THE ENTROPY OF EXPERT ASSESSMENTS WHEN USING A COMPLEX QUALITY INDICATOR IN THE FORM OF A NORMALIZED AVERAGE POLYNOMIAL

5.2.2 — Mathematical, statistical and instrumental methods in economics

Abstract. *Subject: the article is devoted to the problem of constructing ratings of homogeneous objects by quality, taking into account several particular qualities, for which it is proposed to use aggregating, idempotent, strictly monotonic, shift-invariant polynomials in accordance with the methodology outlined in the works of Zotyev D.B.: «On normalized averages criteria interpolating expert assessments» and «Normalized averages and the problem of collapsing quality indicators». Goal: construct a quadratic average polynomial and use it to model a general consumer rating of smartphones based on seven-part qualities. When constructing a quadratic average polynomial, it is necessary to assign expert assessments at each iteration according to the method proposed in the work, thereby narrowing the range of expert assessment for all subsequent elements of the test set. Prove the practical applicability of the method for reducing uncertainty in the examination process. Research design: a representative sample was selected for the study and private ratings were constructed based on quality indicators of this test population. By analogy with the expert-statistical method for determining weight coefficients, the coefficients of the average polynomial of degree 2, which approximates expert estimates of complex quality, were found.*

Results: the practical applicability of the method of reducing uncertainty in the examination process has been proven. A comparison was made of the results obtained using the method of reducing uncertainty in the examination process and the expert-statistical method. An example of constructing a quadratic average polynomial, which significantly increases the number of selected parameters of a complex quality indicator, is considered in detail. A recommendation is proposed for the development of this methodology in order to bring its objectivity to the level of making responsible decisions.

Keywords: *multicriteria optimization, normalized average function, shift-invariant polynomial, aggregating operator, weight coefficient, complex indicator, integral indicator, expert assessment, functional weight, decision making*

For citation: Makhin A. A. Reducing the entropy of expert assessments when using a complex quality indicator in the form of a normalized average polynomial. *Biznes. Obrazovanie. Pravo = Business. Education. Law*. 2024;2(67):158—165. DOI: 10.25683/VOLBI.2024.67.1015.

Введение

Актуальность. Многокритериальная оптимизация в практическом аспекте сводится к проблеме выбора наиболее предпочтительного объекта с учетом его различных и полезных свойств (частных качеств). Для ее решения часто используются комплексные (т. е. общие, агрегирующие, интегральные) показатели качества, при вычислении которых важную роль играют субъективные, экспертные оценки.

Изученность проблемы. Проблема выбора наиболее предпочтительного объекта с учетом его свойств была отражена в работах отечественных и зарубежных авторов. Так, Г. Г. Азгальдов и Э. П. Райхман заложили методологические основы качества как полезного свойства произвольного объекта [1]. С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин описали способ получения весовых коэффициентов в задаче о линейной регрессии экспертных оценок комплексного качества [2, с. 334, 421—424]. Г. И. Брызгалин ввел понятие функциональных весов, которые играют роль весовых коэффициентов и характеризуют влияние частных показателей качества на усредненный показатель [3]. Д. Б. Зотьев ввел понятие нормализованных средних функций, которые могут быть использованы для построения многокритериальных рейтингов [4].

Целесообразность разработки темы. Предполагается, что частные качества объекта измеряются некоторыми показателями $q_i \in [0; 1]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, есть номер качества. Большему значению показателя q_i соответствует более предпочтительное качество i. Задача свертывания показателей $q_1, q_2, \ldots, q_n$ для получения комплексного показателя $q = f(q_1, \ldots, q_n)$ [1], где $q \in [0; 1]$, представляет практический интерес с точки зрения построения общего рейтинга объектов, в котором учтены их рейтинги по каждому из качеств i.

Научная новизна исследования — предложить метод уменьшения неопределенности, который может быть использован в процессе проведения экспертизы и помогает уменьшить диапазон назначения оценок объектам экспертизы.

Цель построить квадратичный средний многочлен (далее — СМ) и смоделировать с его помощью общий, потребительский рейтинг.

Для решения поставленной цели, необходимо решить следующие **задачи**:

– сформировать репрезентативную эмпирическую совокупность для проведения исследования;

– доказать практическую применимость метода уменьшения неопределенности;

– сконструировать многочлен с учетом метода уменьшения неопределенности.

Теоретическая значимость состоит в предложении нового метода проведения экспертизы объектов по их полезным качествам.

Практическая значимость работы заключается в доведении теоретических положений до уровня конкретных методических предложений, которые могут быть использованы в процессе принятия решений.

Методологическую основу проведения исследования составляют анализ данных, экспертно-статистический метод, моделирование нормализованной средней функции.

Основная часть

Данная статья является продолжением исследования, описанного в работе [5]. В результате проделанной работы была доказана практическая применимость метода моделирования мультикритериальных рейтингов посредством СМ степеней выше первой. Подробно рассмотрен пример конструирования квадратичного СМ, который значительно увеличивает число подбираемых параметров комплексного показателя. Проведено сравнение результатов, полученных при построении рейтингов посредством СМ и использования экспертно-статистического метода [6].

Для решения проблемы репрезентативности эмпирической совокупности было принято решения взять тестовые данные, по которым уже было проведено исследование, такими данными послужила работа [7]. В которой рассматривается практический пример моделирования рейтинга смартфонов с помощью методики *FAHP* и *PROMETHEE* I и II.

Для назначения экспертных оценок q^j_0 комплексного показателя качества объектов из эмпирической совокупности в процессе экспертизы предлагается использовать функции из класса нормализованных средних, которые помогут уменьшить их неопределенность и повысить взаимную согласованность. Нормализованные средние определяются как строго монотонные, сдвиг-инвариантные, идемпотентные, агрегирующие операторы [8], введенные Д. Б. Зотьевым [4]. Последние определяются, как такие непрерывно-дифференцируемые на n-мерном кубе $Q^n = \{q \in \mathrm{R}^n : 0 \le q_i \le 1 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$ или на всем пространстве R^n функции $q = f(q_1, \ldots, q_n)$, что $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и для всех $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathrm{R}^n$ выполнены условия:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad 0 < q_i < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} = 1 \ \text{ и } \ \frac{\partial f}{\partial q_i} > 0 \quad (1)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Нормализованные средние имеют следующие свойства, которые *необходимы* для моделирования рейтингов [4]:

– свойство средней функции: $\forall q \in \mathrm{R}^n \ \min q_i \le f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \le \max q_i$;

– свойство сдвиг-инвариантности: $\Delta q_1 = \Delta q_2 = \ldots = \Delta q_n \Rightarrow \Rightarrow \Delta f = \Delta q_i$, где $\Delta f = \Delta q = f(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, \ldots, q_n + \Delta q_n) - f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$;

– свойство строгой монотонности: $\forall i\ q_i > q'_i \Rightarrow f(q_1, q_2, \ldots, q_n) > f(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n)$.

Дифференциальное уравнение в (1) является обобщением условия $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, которому должны удовлетворять весовые коэффициенты $w_i > 0$, при этом функции:

$$\rho_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial q}{\partial q_i} \tag{2}$$

играют роль весов и характеризуют влияние частных показателей качества на усредненный показатель. Для использования функции СМ при решении задачи многокритериальной оптимизации, необходимо доказать, что произвольный СМ является нормализованной средней функцией [9].

Рассмотрим произвольный СМ степени 2:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q_i q_k + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i\ . \tag{3}$$

Из (2) получаем, что функциональный вес при каждом $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\rho_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = 2a_i q_i + \sum_{1 \le k < i} b_{ki} q_k + \sum_{i < k \le n} b_{ik} q_k + c_i\ . \tag{4}$$

Множество точек $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ таких, что все $q_i \in [0; 1]$, является n-мерным кубом Q^n. Его вершины имеют вид $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, где $B_i \in \{0; 1\}$, всего 2^n вершин. Функциональные веса ρ_i (4) являются линейными функциями от $q_1, \ldots, q_n$, поэтому для строгой монотонности многочлена (3) достаточно, чтобы в каждой из вершин этого куба выполнялись условия:

$$2a_i B_i + \sum_{1 \le k < i} b_{ki} B_k + \sum_{i < k \le n} b_{ik} B_k + c_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{5}$$

Если условие (5) выполняется, то из вершины $(0, 0, \ldots, 0)$ получим, что все $c_i > 0$.

Дифференциальное уравнение (1) равносильно системе уравнений:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad 2a_i + \sum_{1 \le k < i} b_{ki} + \sum_{i < k \le n} b_{ik} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k = 1. \tag{6}$$

Таким образом, коэффициенты СМ (3) определяются из (6). Коэффициенты c_i линейных слагаемых можно назвать весами, но теперь они не имеют обычного смысла [10].

Условие (5) для всех вершин $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ куба Q^n можно заменить более простым условием (7), которого достаточно для строгой монотонности квадратичной функции $f(q)$:

$$\begin{gathered} c_i \ge 0 \quad b_{ik} \ge 0 \quad 2a_i + c_i \ge 0 \\ 2a_i + c_i = 0 \Rightarrow a_i < 0 \\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \forall k \in \{i+1, i+2, \ldots, n\} \end{gathered} \tag{7}$$

Частные производные функции $\rho_i(q)$ по q_i и q_k при $k \ne i$ равны $2a_i$ и b_{ki} или b_{ik}. Если все $b_{ik} \ge 0$, то из (6) вытекает, что все $a_i \le 0$. Таким образом, каждая линейная функция ρ_i не возрастает в направлении от точки $O = (0, \ldots, 0)$ до точки $A_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит на i-м месте. При этом функция ρ_i не убывает на любом луче, идущем из точки A_i в направлении любой из координатных осей q_k при $k \ne i$. Условие $2a_i + c_i \ge 0$ означает, что функция $\rho_i(q)$ неотрицательна в вершине куба A_i. Отсюда следует, что $\min_{q \in Q^n} \rho_i(q) = \rho_i(A_i) = 2a_i + c_i \ge 0$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказано, что (7) влечет за собой монотонность функции $f(q)$. Для того чтобы она оказалась строго монотонной, достаточно неравенств $2a_i + c_i > 0$ для всех i, поскольку каждый ρ_i не убывает в направлении от A_i до O. Если же $2a_i + c_i = 0$ для какого-то i, то достаточно неравенства $a_i < 0$, т. к. тогда ρ_i возрастает в направлении от A_i до O [11; 12].

Варьируя свободные параметры b_{ik} при $i < k$ и c_l при $l < n$ [общим числом $n(n + 1) / 2 – 1$]) можно аппроксимировать оценки $q = q^j_0$, решая задачу оптимизации (8) при условиях (6) и (7) или при условиях (5) и (6):

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q_0^j \right)^2 \to \min \tag{8}$$

Здесь m — число объектов эмпирической совокупности. Абсолютная погрешность полученной таким образом аппроксимации оценивается числом:

$$\Delta = \max_{j=1,\ldots,m} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q_0^j \right| \tag{9}$$

Если условие $\Delta \ll 1$ не выполняется, то функция (3) может стать практически бессмысленной. В таком случае можно найти наилучшую аппроксимацию оценок q^j_0 с помощью СМ, действуя следующим образом [13]. Выразив параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и c_n через остальные (свободные) параметры в (6), подставим их в целевую функцию задачи (8) и получим квадратичную функцию $S(b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1n}, b_{23}, \ldots, b_{2n}, \ldots, b_{n-1,n}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$. Полученная функция будет положительно определенной, поэтому своего наименьшего значения функция S достигает в единственной точке $\tilde{X} = (\tilde{b}_{12}, \tilde{b}_{13}, \ldots, \tilde{b}_{1n}, \tilde{b}_{23}, \ldots, \tilde{b}_{2n}, \ldots, \tilde{b}_{n-1,n}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{n-1}) \in \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$, которая определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial b_{ik}} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial c_l} = 0 \qquad 1 \le i < k \le n,\ \ 1 \le l \le n-1. \tag{10}$$

Из (6) следует, что $\partial a_i / \partial b_{ik} = \partial a_k / \partial b_{ik} = –1/2$ и $\partial c_n / \partial c_l = –1$, все остальные производные равны нулю. Отсюда вытекает, что система (10) равносильна системе уравнений (11), если положить в ней $q^j = q^j_0$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q^j \right) \cdot (q_s^j - q_t^j)^2 = 0 & 1 \le s < t \le n \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q^j \right) \cdot (q_l^j - q_n^j) = 0 & 1 \le l \le n-1 \end{cases} \tag{11}$$

Из этой системы, содержащей $n(n + 1) / 2 - 1$ уравнений, однозначно получается точка $\tilde{X}$, что вместе с (6) определяет коэффициенты многочлена (3), осуществляющего регрессию оценок q^j_0 с наименьшей среднеквадратической ошибкой $\sigma = \sqrt{S(\tilde{X})/m}$.

Но этого еще недостаточно, чтобы отнести многочлен (3) к классу СМ. Нужно проверить условие (5). Если оно выполняется, то получен искомый СМ степени 2, который является наилучшим среди всех возможных по среднеквадратической ошибке σ. Однако, следует еще оценить погрешность (9). Если (5) не выполняется, при этом хотя бы одно из неравенств (5) нарушено с отрицательной левой частью, то хотя функция (3) является наилучшей квадратичной регрессией всех экспертных оценок q^j_0 при $j \in \{1, \ldots, m\}$, она не относится к классу СМ из-за нарушения строгой монотонности (при этом (8) выполняется, так что (3) все же будет обобщенной средней функцией). В этом случае следует численно решать задачу (8) при условиях (5) и (6) или при условиях (6) и (7) [14].

В случае СМ степени 2 метод уменьшения неопределенности в процессе вычисления комплексного показателя качества по частным выглядит следующим образом. При любой нумерации экспертных оценок q^j_0 числами $j = 1, 2, \ldots, m$ для любого j должно быть выполнено условие:

$$\max\left(q^j_{\min}, \min\{q^j_1, q^j_2, \ldots, q^j_n\}\right) \le q^j_0 \le \min\left(q^j_{\max}, \max\{q^j_1, q^j_2, \ldots, q^j_n\}\right) \quad (12)$$

Здесь $q^j_{\min}$ и $q^j_{\max}$ — минимальное и максимальное значения функции $g_j(q^1, q^2, \ldots, q^m) = q^j$ на множестве Ω_j таких точек $(q^1, q^2, \ldots, q^m) \in R^m$, что $q^l = q^l_0\ \forall l \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$ и для любого набора двоичных цифр $B_i \in \{0; 1\}$ и чисел a_i, b_{kl}, c_i, удовлетворяющих (6) и (11), справедливы все неравенства (5).

С точки зрения практических вычислений удобней заменить условия (5) на следующие:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ 2a_iB_i + \sum_{1\le k<i} b_{ki}B_k + \sum_{i<k\le n} b_{ik}B_k + c_i \ge \varepsilon, \quad (13)$$

где ε — достаточно близкое к нулю положительное число, например $\varepsilon = 10^{-6}$.

Очевидно, что система уравнений (6) и неравенства (13) определяют некоторый выпуклый многогранник $\wp$ в пространстве $R^{n(n+1)/2-1}$ свободных параметров b_{ik}, c_1, c_2, …, c_{n-1}. Множество Ω_j является пересечением $(m - j + 1)$-мерной плоскости:

$$\{(q^1, q^2, \ldots, q^m) \in \mathbb{R}^m:\ q^l = q^l_0\ \ \forall l \in \{1,2,\ldots,j-1\}\} \quad (14)$$

с выпуклым многогранником, который является прообразом $\wp$ при линейном отображении $R^m \to R^{n(n+1)/2-1}$. Это отображение определяется формулами (11), где коэффициенты a_i и c_n выражены через b_{ik}, c_1, c_2, …, c_{n-1} согласно (6). Таким образом Ω_j — это выпуклый многогранник в R^m, на котором линейная функция $g_j(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ достигает максимума и минимума (они могут оказаться плюс или минус бесконечными) [15].

Последовательная генерация экспертных оценок q^j_0 может происходить в процессе вычисления диапазонов (12) для возможных значений для этих оценок.

Результаты

Как было предложено выше для проведения эксперимента необходимо взять репрезентативную выборку, которая послужила тестовая совокупность из работы [7]. В данной работе строится комплексный рейтинг из 10 смартфонов по семи техническим качествам. Тестовые данные, полученные из упомянутой выше работы, можно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

Тестовые данные для проведения исследования

№	Устройство	Цена, $	Память, GB	ОЗУ, GB	Батарея, MAH	Размер дисплея, CM	Камера, MP	Частота процессора, GHZ
10	Redmi 7a	85	16	2	4000	13,84	12	2
9	Samsung Galaxy A10	105	32	2	3400	15,75	13	1,6
8	Samsung J6 Plus	171	64	4	3300	15,24	13	1,4
7	Oppo k1	197	64	4	3600	16,28	16	1,95
6	Realme 3	124	64	3	4230	15,8	13	2,1
5	Redmi Note 7S	131	32	3	4000	16	48	2,2
4	Honor 10 Lite	160	64	6	3400	15,77	13	2,2
3	Realme 5i	144	128	4	5000	16,56	12	2,2
2	Redmi 8a	98	32	3	5000	15,8	12	1,95
1	Redmi k20 pro	355	128	6	4000	16,23	48	2,84

Пересчитаем частные оценки, полученные от авторов статьи [7], в значения частных показателей качества $q_1 = q^j_1$, $q_2 = q^j_2$, $q_3 = q^j_3$, $q_4 = q^j_4$, $q_5 = q^j_5$, $q_6 = q^j_6$, $q_7 = q^j_7$ цены, внутренней памяти, ОЗУ, батареи, размера дисплея, камеры, частоты процессора соответственное для смартфона j, где $j = 1, 2, \ldots, 10$. Результаты перерасчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Частные показатели качества смартфонов

№	Устройство	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
10	Redmi 7a	0,000	0,000	0,000	0,412	0,000	0,000	0,417
9	Samsung Galaxy A10	0,074	0,143	0,000	0,059	0,702	0,028	0,139
8	Samsung J6 Plus	0,319	0,429	0,500	0,000	0,515	0,028	0,000
7	Oppo k1	0,415	0,429	0,500	0,176	0,897	0,111	0,382
6	Realme 3	0,144	0,429	0,250	0,547	0,721	0,028	0,486
5	Redmi Note 7S	0,170	0,143	0,250	0,412	0,794	1,000	0,556
4	Honor 10 Lite	0,278	0,429	1,000	0,059	0,710	0,028	0,556
3	Realme 5i	0,219	1,000	0,500	1,000	1,000	0,000	0,556
2	Redmi 8a	0,048	0,143	0,250	1,000	0,721	0,000	0,382
1	Redmi k20 pro	1,000	1,000	1,000	0,412	0,879	1,000	1,000

Задача: используя метод уменьшения неопределенности, описанный формулой (12) найти СМ $f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$ степени 2, который наилучшим образом аппроксимирует экспертные оценки q^j_0, так что для каждого $j = 1, 2, \ldots, 10$ имеет место приближенное равенство $q^j_0 \approx f(q^j_1, q^j_2, q^j_3, q^j_4, q^j_5, q^j_6, q^j_7)$. Экспертные оценки необходимо генерировать в процессе вычисления диапазонов (12).

Многочлен степени 2 от $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7$ выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
f(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7) = {} & a_1q_1^2 + a_2q_2^2 + a_3q_3^2 + a_4q_4^2 + a_5q_5^2 + a_6q_6^2 + a_7q_7^2 + \\
& + b_{12}q_1q_2 + b_{13}q_1q_3 + b_{14}q_1q_4 + b_{15}q_1q_5 + b_{16}q_1q_6 + b_{17}q_1q_7 + b_{23}q_2q_3 + \\
& + b_{24}q_2q_4 + b_{25}q_2q_5 + b_{26}q_2q_6 + b_{27}q_2q_7 + b_{34}q_3q_4 + b_{35}q_3q_5 + b_{36}q_3q_6 + \\
& + b_{37}q_3q_7 + b_{45}q_4q_5 + b_{46}q_4q_6 + b_{47}q_4q_7 + b_{56}q_5q_6 + b_{57}q_5q_7 + b_{67}q_6q_7 + \\
& + c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 + c_4q_4 + c_5q_5 + c_6q_6 + c_7q_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial q_1} &= 2a_1q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}q_3 + b_{14}q_4 + b_{15}q_5 + b_{16}q_6 + b_{17}q_7 + c_1 \\
\frac{\partial f}{\partial q_2} &= 2a_2q_2 + b_{12}q_1 + b_{23}q_3 + b_{24}q_4 + b_{25}q_5 + b_{26}q_6 + b_{27}q_7 + c_2 \\
\frac{\partial f}{\partial q_3} &= 2a_3q_3 + b_{13}q_1 + b_{23}q_2 + b_{34}q_4 + b_{35}q_5 + b_{36}q_6 + b_{37}q_7 + c_3 \\
\frac{\partial f}{\partial q_4} &= 2a_4q_4 + b_{14}q_1 + b_{24}q_2 + b_{34}q_3 + b_{45}q_5 + b_{46}q_6 + b_{47}q_7 + c_4 \qquad (15) \\
\frac{\partial f}{\partial q_5} &= 2a_5q_5 + b_{15}q_1 + b_{25}q_2 + b_{35}q_3 + b_{45}q_4 + b_{56}q_6 + b_{57}q_7 + c_5 \\
\frac{\partial f}{\partial q_6} &= 2a_6q_6 + b_{16}q_1 + b_{26}q_2 + b_{36}q_3 + b_{46}q_4 + b_{56}q_5 + b_{67}q_7 + c_6 \\
\frac{\partial f}{\partial q_7} &= 2a_7q_7 + b_{17}q_1 + b_{27}q_2 + b_{37}q_3 + b_{47}q_4 + b_{57}q_5 + b_{67}q_6 + c_7
\end{aligned}
$$

Уравнение $\sum_{i=1}^{7} \partial f/\partial q_i = 1$ с учетом (15) равносильно следующей системе уравнений:

$$
\begin{gathered}
2a_1 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17} = 0 \\
2a_2 + b_{12} + b_{23} + b_{24} + b_{25} + b_{26} + b_{27} = 0 \\
2a_3 + b_{13} + b_{23} + b_{34} + b_{35} + b_{36} + b_{37} = 0 \\
2a_4 + b_{14} + b_{24} + b_{34} + b_{45} + b_{46} + b_{47} = 0 \\
2a_5 + b_{15} + b_{25} + b_{35} + b_{45} + b_{56} + b_{57} = 0 \\
2a_6 + b_{16} + b_{26} + b_{36} + b_{46} + b_{56} + b_{67} = 0 \\
2a_7 + b_{17} + b_{27} + b_{37} + b_{47} + b_{57} + b_{67} = 0 \\
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 1,
\end{gathered}
$$

– которая имеет следующее решение:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17}}{2} \\
a_2 &= -\frac{b_{12} + b_{23} + b_{24} + b_{25} + b_{26} + b_{27}}{2} \\
a_3 &= -\frac{b_{13} + b_{23} + b_{34} + b_{35} + b_{36} + b_{37}}{2} \\
a_4 &= -\frac{b_{14} + b_{24} + b_{34} + b_{45} + b_{46} + b_{47}}{2} \\
a_5 &= -\frac{b_{15} + b_{25} + b_{35} + b_{45} + b_{56} + b_{57}}{2} \\
a_6 &= -\frac{b_{16} + b_{26} + b_{36} + b_{46} + b_{56} + b_{67}}{2} \\
a_7 &= -\frac{b_{17} + b_{27} + b_{37} + b_{47} + b_{57} + b_{67}}{2} \\
c_7 &= 1 - c_1 - c_2 - c_3 - c_4 - c_5 - c_6.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Итак, при условии (16) многочлен $f(q)$ является средней, сдвиг-инвариантной функцией. Осталось выяснить: при каких условиях она будет строго-монотонной.

Множество точек $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$ таких, что все $q_i \in [0; 1]$, является семимерным кубом Q^7. Его вершины — точки (0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), …, (1,0,0,0), (0,0,1,1), …, (1,1,1,1), всего 128 вершин. Поскольку функции $\partial f/\partial q_i$ являются линейными, для проверки условия строгой монотонности $\partial f/\partial q_i > 0$ достаточно, чтобы в каждой из вершин гиперкуба Q^7 выполнялись условия $\partial f/\partial q_i > 0\ \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. С учетом вычислительной погрешности удобнее потребовать, чтобы в вершинах Q^7 выполнялось $\partial f/\partial q_i \geq \varepsilon$.

Варьируя свободные параметры b_{ik} при $i < k$ и c_l при $l < 7$ (общим числом 10), учитывая формулы (16) необходимо сгенерировать экспертные оценки согласно формуле (12). На основании сгенерированных оценок необходимо аппроксимировать экспертные оценки $q = q^j_0$, решая задачу оптимизации (8) при указанных выше ограничениях на значения функций (15) в вершинах гиперкуба Q^7. Абсолютная погрешность оценивается числом (9).

Решение: с помощью надстройки «Поиск решения» пакета *Excel* были найдены диапазоны экспертного оценивания и выбраны экспертные оценки. Экспертные оценки выбирались по середине получившегося диапазона. Полученные результаты отображены в табл. 3. В представленной таблице колонка q_0 соответствует полученным экспертным оценкам, колонки $q_{\max}$ и $q_{\min}$ отображают диапазоны максимального и минимального значения решения системы (11) при заданных ограничениях. Колонки «левая граница» и «правая граница» показывают полученные диапазоны выбора экспертных оценок и соответствуют левой и правой части условия (12).

В результате определения экспертных оценок, путем применения метода уменьшения неопределенности экспертных оценок было найдено решение a_i, b_{ik}, c_l задачи (8) с учетом (16), при условиях, что все функции (15) принимают значения не меньше $\varepsilon = 10^{-6}$ во всех таких точках (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7), что все $d_i \in \{0; 1\}$. В результате были найдены коэффициенты следующего СМ степени 2:

$$\begin{aligned} f(q) = {} & 0{,}020q_1^2 + 0{,}036q_2^2 + 0{,}027q_3^2 + \\ & + 0{,}038q_4^2 + 0{,}051q_5^2 + 0{,}014q_6^2 - 0{,}022q_7^2 - 0{,}073q_1q_2 + 0{,}033q_1q_4 - \\ & - 0{,}051q_3q_4 - 0{,}002q_3q_6 - 0{,}155q_4q_5 + 0{,}097q_4q_7 + 0{,}040q_5q_6 + 0{,}013q_5q_7 - \\ & - 0{,}067q_6q_7 + 0{,}073q_1 + 0{,}073q_2 + 0{,}053q_3 + 0{,}206q_4 + 0{,}277q_5 + 0{,}069q_6 + \\ & + 0{,}249q_7 \end{aligned} \tag{17}$$

Таблица 3

Полученные экспертные оценки и диапазоны поиска

№	Устройство	q_0	q_{max}	q_{min}	Левая граница	Правая граница
10	Redmi 7a	0,208	0,417	0,000	0,000	0,417
9	Samsung Galaxy A10	0,280	0,535	0,025	0,025	0,535
8	Samsung J6 Plus	0,245	0,352	0,137	0,137	0,352
7	Oppo k1	0,504	0,566	0,442	0,442	0,566
6	Realme 3	0,492	0,573	0,410	0,410	0,573
5	Redmi Note 7S	0,564	0,677	0,452	0,452	0,677
4	Honor 10 Lite	0,498	0,596	0,400	0,400	0,596
3	Realme 5i	0,735	0,812	0,659	0,659	0,812
2	Redmi 8a	0,509	0,633	0,385	0,385	0,633
1	Redmi k20 pro	0,848	0,935	0,761	0,761	0,935

Погрешность (9), с которой многочлен (17) аппроксимирует экспертные оценки q^j_0 имеет значение $\Delta = 0{,}197$. Общий рейтинг смартфонов, смоделированный в табл. 4 с помощью СМ (17), выглядит следующим образом, где в столбце q стоят значения комплексного показателя качества.

Таблица 4

Общий рейтинг смартфонов, смоделированный с помощью СМ

Номер	Устройство	q
10	Redmi 7a	0,208
9	Samsung J6 Plus	0,245
8	Samsung Galaxy A10	0,28
3	Realme 3	0,492
7	Honor 10 Lite	0,498
6	Oppo k1	0,504
5	Redmi 8a	0,509
2	Redmi Note 7S	0,564
4	Realme 5i	0,735
1	Redmi k20 pro	0,848

В представленной выше таблице лучшей модели в выборке соответствует порядковый номер 1, худшему — 10. Значение абсолютной погрешности получилось настолько великим, поскольку результирующий рейтинг в работе [7], с которого была взята тестовая совокупность кардинально отличается от полученного при использовании СМ степени 2 и имеет следующий вид, представленный в табл. 5.

Таблица 5

Общий рейтинг смартфонов, полученный S. S. Goswami, D. K. Behera [7]

Номер	Устройство
10	Samsung J6 Plus
9	Samsung Galaxy A10
8	Oppo k1
7	Redmi k20 pro
6	Redmi 7a
5	Honor 10 Lite
4	Realme 3
3	Redmi Note 7S
2	Redmi 8a
1	Realme 5i

Для проверки полученных результатов было принято решение выполнить перерасчет рейтинга, используя наиболее научно обоснованный метод, экспертно-статистический. При наличии экспертной оценки $q = q^j_0$ комплексного показателя q для каждого j-го объекта в некоторой эмпирической совокупности из N объектов и при известных значениях частных показателей $q_i = q^j_i$, где $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, N\}$, коэффициенты w_i подбираются так, чтобы аппроксимировать оценки q^j_0 числами, найденными по формуле (2) значениями. Для этого решается задача оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(q_0^j - \sum_{i=1}^{n} w_i q_i^j\right)^2 \to \min \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \forall i \quad w_i \geq 0 \quad .(18)$$

Абсолютная погрешность такой аппроксимации вычисляется следующим образом:

$$\Delta = \max_{j=1,\ldots,N}\left|q_0^j - \sum_{i=1}^{n} w_i q_i^j\right|.$$

Для проведения расчетов необходимо назначить экспертные оценки, каждой модели смартфона. Экспертные оценки назначались по следующему правилу: $q_0 = 1/N$, где N — количество объектов тестовой совокупности. В результате проверки был получен следующий многочлен: $q = 0{,}702q_4 + 0{,}183q_5 + 0{,}115q_7$. Абсолютная погрешность, с которой данная линейная функция аппроксимирует экспертные оценки q^j_0 имеет значение $\Delta = 0{,}320$. Соответствующий рейтинг смартфоном, представленный в табл. 6, выглядит следующим образом, где в столбце q стоят значения комплексного показателя качества $q = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$.

Полученный рейтинг также сильно отличается от результирующего в работе [7], но более приближен к рейтингу полученному при использовании СМ степени 2. Можно сделать вывод, что рейтинг, полученный в работе [7], не является лучшим по Парето. В результате проделанной работы можно отметить возрастание погрешности аппроксимации (9) при переходе от квадратичного к линейному СМ составило 60 %.

Таблица 6

Общий рейтинг смартфонов, смоделированный с помощью экспертно-статистического метода

Номер	Устройство	q
10	Samsung J6 Plus	0,094
9	Samsung Galaxy A10	0,186
3	Honor 10 Lite	0,235
5	Oppo k1	0,332
8	Redmi 7a	0,337
4	Redmi Note 7S	0,498
6	Redmi k20 pro	0,565
7	Realme 3	0,572
2	Redmi 8a	0,878
1	Realme 5i	0,949

Заключение

Доказана практическая применимость метода уменьшения неопределенности в процессе проведения экспертизы. Подробно рассмотрен пример конструирования квадратичного СМ с учетом метода уменьшения неопределенности. Для проверки математической модели требуется сравнить значения абсолютной погрешности, полученные при использовании СМ степени 2 на граничных и срединных значениях диапазонов каждого объекта тестовой совокупности, полученных с помощью метода уменьшения неопределенности, с абсолютной погрешностью, полученной при использовании экспертно-статистического метода.

Найденный таким образом СМ $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ предлагается использовать для вычисления комплексного показателя качества $q' = f(q'_1, \ldots, q'_n)$ произвольного объекта из генеральной совокупности, характеризуемого частными показателями качества q'_i. Тогда общий рейтинг генеральной совокупности определяется отношением предпочтения между объектами, согласно которому большему значению комплексного показателя q отвечает более предпочтительный объект.

Предложенный в работе метод может быть использован для разрешения различных проблем организаций, заключающихся в анализе ситуации, генерации альтернатив, выборе из них наилучшей и ее дальнейшей реализации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Азгальдов Г. Г., Райхман Э. П. О квалиметрии / под ред. А. В. Гличева. М. : Изд-во стандартов, 1973. 172 с.
2. Прикладная статистика : в 3 т. / под ред. проф. С. А. Айвазян. М. : Финансы и статистика, 1989. Т. 3 : Классификация и снижение размерности. 607 с.
3. Брызгалин Г. И. Введение в теорию качества. Волгоград : Изд-во Волгогр. политехн. ин-та, 1988. 91 с.
4. Зотьев Д. Б. Нормализованные средние и проблема свертывания показателей качества // Справочник. Инженерный журнал. 2009. Т. 146. № 5. С. 43—48.
5. Махин А. А. Усредняющая, квадратичная регрессия экспертных оценок качества смартфона // Современная экономика: проблемы и решения. 2022. № 12(156). С. 8—17.
6. Зотьев Д. Б. К проблеме определения весовых коэффициентов на основании экспертных оценок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2011. Т. 77. № 1. С. 75—78.
7. Goswami S. S., Behera D. K. Evaluation of the best smartphone model in the market by integrating fuzzy-AHP and PROMETHEE decision-making approach // Decision. 2021. Vol. 48. Iss. 1. Pp. 71—96. DOI: 10.1007/s40622-020-00260-8.
8. Calvo T., Kolesárová A., Komorníková M., Mesiar R. Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods // Aggregation Operators / eds. T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar. Heidelberg : Physica, 2002. (Studies in Fuzziness and Soft Computing; vol. 97). Pp. 3—104 DOI: 10.1007/978-3-7908-1787-4_1.
9. Зотьев Д. Б. О нормализованных средних критериях, интерполирующих экспертные оценки // Справочник. Инженерный журнал. 2012. Т. 184. № 7. С. 50—56.
10. Кондрашова Н. В., Данилов И. С. Совершенствование алгоритма расчета интегрального показателя устойчивого развития экономического субъекта // Современная экономика: проблемы и решения. 2002. № 5. С. 54—66.

11. Marler R. T., Arora J. S. The weighted sum method for multi-objective optimization: New insights // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2010. Vol. 41. Iss. 6. Pp. 853—862. DOI: 10.1007/s00158-009-0460-7.

12. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М. : Наука, 1974. 256 с.

13. Debreu G. Topological methods in cardinal utility theory : Cowles Foundation Discussion Paper No. 76. Yale University, 1959. 17 p.

14. Анохин А. М., Глотов В. А., Павельев В. В., Черкашин А. М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 3—35.

15. Saaty Th. L. Decision making with the analytic hierarchy process // International Journal of Services Sciences. 2008. Vol. 1. No. 1. Pp. 83—98.

REFERENCES

1. Azgal`dov G. G., Raikhman E. P. About qualimetry. A. V. Glicheva (ed.). Moscow, Standards Publishing House, 1973. 172 p. (In Russ.)

2. Applied statistics. In 3 vols. S. A. Aivazyan (ed.). Moscow, Finansy i statistika, 1989. Vol. 3: Classification and dimensionality reduction. 607 p. (In Russ.)

3. Bryzgalin G. I. Introduction to the theory of quality. Volgograd, Volgograd Polytechnic Institute publ., 1988. 91 p. (In Russ.)

4. Zotiev D. B. Normalized averages and the problem of collapsing quality indicators. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal = Handbook. An Engineering journal.* 2009; 146(5):43—48. (In Russ.)

5. Makhin A. A. Averaging, quadratic regression of expert assessments of smartphone quality. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern economics: problems and solutions*. 2022;12(156):8—17. (In Russ.)

6. Zotyev D. B. On the problem of determining weight coefficients based on expert assessments. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov = Industrial laboratory. Diagnostics of materials.* 2011;77(1):75—78. (In Russ.)

7. Goswami S. S., Behera D. K. Evaluation of the best smartphone model in the market by integrating fuzzy-AHP and PROMETHEE decision-making approach. *Decision*. 2021;48(1):71—96. DOI: 10.1007/s40622-020-00260-8.

8. Calvo T., Kolesárová A., Komorníková M., Mesiar R. Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods. *Aggregation Operators*. Studies in Fuzziness and Soft Computing; vol. 97. T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (eds.). Heidelberg, Physica, 2002. Pp. 3—104 DOI: 10.1007/978-3-7908-1787-4_1.

9. Zotyev D. B. On normalized average criteria interpolating expert assessments. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal = Handbook. An Engineering journal.* 2012;184(7):50—56. (In Russ.)

10. Kondrashova N. V., Danilov I. S. Improving the algorithm for calculating the integral indicator of sustainable development of an economic entity. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern economics: problems and solutions*. 2002;5:54—66. (In Russ.)

11. Marler R. T., Arora J. S. The weighted sum method for multi-objective optimization: New insights. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010;41(6):853—862. DOI: 10.1007/s00158-009-0460-7.

12. Mirkin B. G. The problem of group choice. Moscow, Nauka, 1974. 256 p. (In Russ.)

13. Debreu G. Topological methods in cardinal utility theory. Cowles Foundation Discussion Paper No. 76. Yale University, 1959. 17 p.

14. Anokhin A. M., Glotov V. A., Pavelev V. V., Cherkashin A. M. Methods for determining criteria importance coefficients. *Avtomatika i Telemekhanika*. 1997;8:3—35. (In Russ.)

15. Saaty Th. L. Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*. 2008;1(1):83—98.

Статья поступила в редакцию 28.03.2024; одобрена после рецензирования 27.04.2024; принята к публикации 06.05.2024.
The article was submitted 28.03.2024; approved after reviewing 27.04.2024; accepted for publication 06.05.2024.