регулятор устанавливает следующую ставку налогообложения: $\tau = P(Y^{c*}) - C'(Y^{c*})$. Следовательно, используя (5), государство может достичь оптимума с точки зрения максимизации национального благосостояния (устанавливая оптимальную ставку налогообложения в расчете на единицу выбросов) в условиях, когда оптимально полное внедрение в производственной отрасли инновационной технологии.

Если оптимально частичное внедрение в производственной отрасли инновационной технологии, то государство сталкивается с проблемой множества состояний равновесия. Одно из них эффективно, если $\tau = \frac{r}{1-e}$. Это завершает доказательство.

Итак, в работе построена экономико-математическая модель регулирования вредных производственных выбросов конкурентного производственного сектора. Учитывается наличие научно-исследовательского сектора, разрабатывающего инновационную технологию, позволяющую снизить выбросы загрязняющих веществ в окружающую среду. Проведено сравнение таких инструментов государственного регулирования выбросов, как налогообложение предприятий производственного сектора, допускающих выбросы загрязняющих веществ, и продаваемые квоты на выбросы. Проведенный анализ показывает, что если имеется только один провал рынка – отрицательные экстерналии, создаваемые вредными производственными выбросами, то для восстановления эффективности рынка достаточен единственный инструмент регулирования – продаваемые разрешения на выбросы загрязняющих веществ или налогообложение предприятий производственного сектора, допускающих вредные выбросы в окружающую среду.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голуб А. А., Струкова Е. Б. Экономика природных ресурсов. М.: Аспект Пресс, 1998. 320 с.

2. Гофман К. Г., Рюмина Е. В. Кредитные отношения общества и природы // Экономика и математические методы. 1994. № 30 (2). С. 155–161; Kolstad C. D. 2004. Environmental Economics. Oxford: Oxford University Press, 2000. 400 p.

3. Скитер Н. Н. Моделирование оптимальных налоговых платежей за производственные выбросы // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2011. № 1 (14). С. 201–208.

REFERENCES

1. Golub A. A., Strukova E. B. Economics of natural resources. M.: Aspect Press, 1998. 320 p.

2. Gofman K. G., Ryumina E. V. Credit relations of the society and the nature // Economics and mathematical methods. 1994. # 30 (2). P. 155–161; Kolstad C. D. 2004. Environmental Economics. Oxford: Oxford University Press, 2000. 400 p.

3. Skiter N. N. Modeling of optimal taxes for production emissions // Business. Education. Law. Bulleting of the Volgograd Business Institute. 2011. # 1 (14). P. 201–208.

УДК 338.57
ББК 65.263-21

Мелихов Дмитрий Александрович
аспирант каф. информационных систем в экономике
Волгоградского государственного технического университета,
г. Волгоград,
e-mail: mel-v07@mail.ru

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ РАЗМЕРА СЕТИ КАК ДОЛИ УЧАСТНИКОВ РЫНКА

ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL INVESTMENT WITH REGARDS TO THE NETWORK SIZE AS THE MARKET PARTICIPANTS SHARE

Построена экономико-математическая модель инвестирования, которая предполагает ситуацию, где фирма имеет возможность инвестирования в производство товаров/услуг на рынке, характеризующуюся неопределенностью. В рассматриваемой стратегической модели определены стоимость инвестиционного проекта с учетом безрисковой процентной ставки и трендовой составляющей, момент необратимого инвестирования и уровень качества производимой продукции (товаров или услуг) на рынке со стохастическим спросом, положительными сетевыми экстерналиями и конкурентным входом. Конкурентный вход обусловлен оптимальным инвестиционным решением конкурирующей фирмы. Проведено сравнение случаев с фиксированным и регулируемым в процессе производства уровнем качества продукции для определения дополнительной составляющей стоимости опциона инвестирования, возникающей благодаря возможности регулирования уровня качества продукции (товаров или услуг) в производственном процессе.

The economic-mathematical model of investment, which involves a situation where the company has an opportunity *to invest in production of goods/services at the market that is characterized by uncertainty has been built. The cost of investment project, taking into account the risk-free interest rate and the trend component, the time of irreversible investment and the level of quality of manufactured products (goods or services) at the market with stochastic demand, positive network externals and competitive penetration have been determined for the investigated model. Competitive penetration is specified by the optimal investment solution of competing company. Comparison of cases with a fixed and regulated level of product quality during production has been made to determine additional component of the investment option cost arisen by the possibility of regulation of the products level of quality (goods or services) in production process.*

Ключевые слова: стоимость инвестиционного проекта, уровень качества продукции, оптимальный инвестиционный порог, сетевые экстерналии, волатильность, экономико-математическая модель, инвестирование, товар, качество продукции, функция полезности, опцион инвестирования, неопределенность рынка.

Keywords: cost of investment project, level of product quality, optimal investment threshold, network externalities, volatility, economic-mathematical model, investment, goods, product quality, usefulness function, option of investment, market uncertainty.

Рассматриваемая экономико-математическая модель инвестирования предполагает ситуацию, в которой фирма имеет возможность инвестирования в производство товаров/услуг на рынке, характеризующемся неопределенностью. Предположим, что фирма характеризуется нейтральным отношением к риску. Это означает, что для нее действительно следующее: полезность значения ожидаемых результатов лотереи равна значению ожидаемой полезности результатов лотереи, т. е. разброс результатов лотереи в окрестности ожидаемого значения (признак существования рисков) не имеет никакого влияния на ожидаемую полезность. Фирма выбирает оптимальный момент инвестирования и качество производимой продукции (услуг). Предполагаем, что однажды выбранное качество производимой продукции (услуг) не может быть изменено в производственном процессе. Естественно предположить, что прибыль в расчете на потребителя не является постоянной величиной, а стохастически эволюционирует во времени. Например, прибыль в расчете на потребителя мобильной телефонной сети зависит от интенсивности переговоров, конкурентного давления и появления новых услуг, которые могут быть предложены потребителю за дополнительную плату. Очевидно, что временная эволюция этих экономических переменных содержит случайную компоненту. Мгновенную прибыль в расчете на потребителя в момент t обозначаем $x(t)$, где x описывается геометрическим броуновским движением

$$dx(t) = \alpha x(t)dt + \sigma x(t)dw(t). \tag{1}$$

В уравнении (1) параметр α обозначает детерминированную тенденцию (трендовую составляющую), σ – волатильность (мгновенное среднее квадратическое отклонение) прибыли, а dw – приращение винеровского случайного процесса. В последующем анализе предполагаем, что начальная реализация процесса (1) $x(0)$ достаточно мала, так что во всех возможных случаях рынок слишком мал для того, чтобы мгновенное инвестирование было оптимальным.

Предполагаем, что имеется гетерогенный континуум потребителей, характеризующихся оценками ω_i качества продукции, однородно распределенными в интервале [0, 1]. Потребитель извлекает полезность не только из автономного потребления товара (услуги), но также из количества других потребителей, использующих этот товар (услугу). Функция полезности, удовлетворяющая этим свойствам, может быть представлена в виде

$$U_i = \omega_i q + an - k, \tag{2}$$

где q представляет собой качество товара (услуги), k – затраты потребителя на приобретение товара (параметр k не следует связывать с ценой, которую потребитель должен заплатить за товар (услугу); его можно интерпретировать как немонетарные затраты, связанные с усилиями и временем, необходимыми для поиска товара (услуги) с подходящими характеристиками), а параметр a измеряет интенсивность сетевых экстерналий. Следовательно, ω_i можно интерпретировать как предельную скорость замещения между доходом и качеством товара (услуги), так что более высокие значения ω_i соответствуют более низкой предельной полезности дохода и, вследствие этого, более высокому доходу. Большие значения параметра a означают, что полезность потребителя растет с ростом других потребителей этого товара (услуги). В противном случае, если параметр a стремится к нулю, количество потребителей этого товара (услуги) не оказывает влияния на полезность данного потребителя (безусловно, имеются примеры отрицательных значений параметра a, например: полезность обладания «роллс-ройсом» является убывающей по количеству других обладателей этого брэнда в некотором регионе). Размер сети $n \in [0, 1]$ интерпретируется как доля участников полного рынка, которая приобрела данный товар (услугу). Без потери общности нормируем абсолютный размер полного рынка к единице.

Итак, сетевые экстерналии присутствуют, если количество других потребителей, использующих тот же товар (услугу), воздействует на полезность данного потребителя. Положительные (отрицательные) экстерналии означают, что полезность данного потребителя возрастает (убывает) с ростом количества остальных потребителей.

На основе функции полезности потребителей можно выразить размер сети как функцию качества, выбранного фирмой. Определим потребителя типа $\overline{\omega}$ как безразличного между приобретением товара (услуги) или отказом от приобретения. Следовательно, имеет место равенство

$$\overline{\omega}q + an - k = 0. \tag{3}$$

Полагая $a < k < q$, что обеспечивает внутреннее решение для размера сети (ниже мы откажемся от этих ограничений), и замечая, что размер сети n равен $1-\overline{\omega}$, получаем

$$n(q) = \frac{q-k}{q-a}. \tag{4}$$

Будем предполагать, что производственные затраты в расчете на единицу продукции определяются функцией $c(q)$, удовлетворяющей условиям $c'(q) > 0$ и $c''(q) \geq 0$. Фирма выбирает качество q с целью максимизации опциона инвестирования. Чтобы определить стоимость опциона инвестирования, начнем с вычисления стоимости проекта после того, как решение об инвестировании принято. Стоимость проекта находится интегрированием по времени дисконтированной разности между мгновенной прибылью $xn(q)$, полученной от имеющихся потребителей, и производственными затратами $c(q)n(q)$. Заметим, что мгновенное значение числа имеющихся потребителей может быть получено интегрированием их полезностей по всем потребительским типам, т. е.

$$\int \frac{1}{\omega}(\omega q + an - k)d\omega .$$

В результате получаем

$0{,}5n^2a + 0{,}5(q - k)n.$

Это выражение является выпуклой функцией n. Однако мы будем предполагать, что фирма не проводит ценовую дискриминацию, так что не извлекает полностью потребительский излишек. Вместо этого накладываем условие линейности прибыли фирмы по n. Обозначим стоимость проекта в момент t через $V(t)$. Получаем

$$\begin{aligned} V(t) &= E\left[\int_t^{\infty}(x(s) - c(q))n(q)\exp[-r(s-t)]ds\right] = \\ &= \frac{n(q)x}{\delta} - \frac{c(q)n(q)}{r} = \\ &\equiv R(q)x - C(q), \end{aligned} \tag{6}$$

где $R(q) = \frac{n(q)}{\delta}$, $C(q) = \frac{c(q)n(q)}{r}$, r – безрисковая процентная ставка, а параметр δ определяется как

$$\delta \equiv r - \alpha. \tag{7}$$

Фирма несет невозвратные инвестиционные затраты I. Хотя затраты I не зависят от выбора качества, затраты, связанные с осуществлением проекта, увеличиваются с ростом качества производимой продукции благодаря более высокой настоящей величине производственных затрат. Заметим, что альтернативная интерпретация структуры затрат состоит в том, что первоначальные инвестиционные затраты составляют $I + c(q)n(q)/r$, а предельные производственные затраты равны нулю для всех уровней качества q.

Решение фирмы состоит в выборе оптимального качества продукции q и оптимального момента инвестирования x^* (оптимального инвестиционного порога) с целью максимизации стоимости опциона инвестирования.

Процесс нахождения оптимального инвестиционного порога и оптимального качества продукции осуществим в два этапа. Сначала решим задачу оптимальной остановки (определение оптимального момента инвестирования) для произвольного уровня q. В качестве промежуточного результата мы получим оптимальный инвестиционный порог и стоимость опциона инвестирования как функцию q. На втором шаге мы максимизируем стоимость опциона инвестирования относительно q.

Оптимальный инвестиционный порог, определяемый как наименьшее значение $x^*(q)$, при котором фирма входит в рынок, записывается в виде

$$x^*(q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{I + C(q)}{R(q)}, \tag{8}$$

где

$$\beta_1 = -\frac{\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1. \tag{9}$$

Стоимость опциона инвестирования $F(q, x)$ определяется соотношением

$$F(q,x) = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1}}\frac{R(q)^{\beta_1}x^{\beta_1}}{(I + C(q))^{\beta_1 - 1}}. \tag{10}$$

Далее максимизируем стоимость опциона инвестирования относительно q для данного оптимального инвестиционного решения $x^*(q)$. Для обеспечения того, что решение будет представлять собой максимум, введем следующее предположение.

Пусть q^* – решение уравнения $\frac{\partial F(q,x^*)}{\partial q} = 0.$ Тогда имеет место соотношение (нижние индексы обозначают частные производные)

$$(\beta_1(C + I)R_{qq} + C_qR_q - (\beta_1 - 1)C_{qq}R)\Big|_{q=q^*} < 0. \tag{11}$$

Решение задачи выбора оптимального качества продукции дается следующим утверждением.

При условии выполнения вышеизложенного предположения оптимальное качество продукции q^* неявно определяется решением следующего уравнения:

$$C_q = x^*R_q \tag{12}$$

Оптимальный уровень качества вычисляется путем максимизации выражения (10) относительно q. Соответствующее условие первого порядка имеет вид (зависимость соответствующих функций от q опущена во избежание громоздкости)

$$\frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1}}\frac{x^{\beta_1}}{(C + I)^{2\beta_1 - 2}}\left(\beta_1 R^{\beta_1 - 1}(C + I)^{\beta_1 - 1}R_q - (\beta_1 - 1)R^{\beta_1}(C + I)^{\beta_1 - 2}C_q\right). \tag{13}$$

Из этого соотношения следует равенство

$$\beta_1(C + I)R_q - (\beta_1 - 1)RC_q = 0. \tag{14}$$

Поделив это равенство на $(\beta_1 - 1)x^* R$ и замечая, что

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{C + I}{x^*R} = 1,$$

получаем требуемый результат. Соответствующее условие второго порядка имеет вид

$$(\beta_1(C + I)R_{qq} + C_qR_q - (\beta_1 - 1)C_{qq}R)\Big|_{q=q^*} < 0. \tag{15}$$

Это необходимое и достаточное условие для того, чтобы значение q^* соответствовало локальному максимуму. Если уравнение (14) имеет несколько решений, удовлетворяющих условию (15), тогда выбирается решение, соответствующее максимальному значению выражения (10).

Из формулы 11 получаем, что величина опциона инвестирования достигает максимума, если на оптимальном инвестиционном пороге предельные затраты на увеличение качества продукции равны ожидаемому предельному выигрышу. Условие (12) означает, что в оптимуме отношение эластичностей функций $C(q) + I$ и $R(q)$ равно множителю, возникающему в выражении для оптимального инвестиционного порога $x^*(q)$ (8), т. е.

$$\left.\frac{\varepsilon_{C+I,q}}{\varepsilon_{R,q}}\right|_{q=q^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_{f,x} \equiv \frac{xf_x}{f}$.

Для получения большей информации из полученного результата проанализируем соотношение между неопределенностью рынка, интенсивностью сетевых экстерналий, размером сети и оптимальным качеством продукции.

Тот факт, что более высокая неопределенность, связанная со спросом на рынке, положительно влияет на выбор фирмой качества продукции, следует из подобной опциону структуры стоимости проекта. Кроме того, более высокая скорость роста спроса на рынке также означает выбор более высокого качества продукции, поскольку фирма предпочитает нести дополнительные затраты для увеличения качества продукции, если ожидается, что прибыль будет расти быстрее. Положительный знак производной по α эквивалентен отрицательной производной по δ.

Кроме того, численные расчеты показывают, что влияние сетевых экстерналий на выбор оптимального качества продукции отрицательно. Последнее соотношение следует из того, что уровень качества и степень сетевых экстерналий действуют как субституты в предельной функции полезности потребителей. Поскольку более высокое качество эквивалентно большей потребительской базе (см. соотношение (4)), размер сети в оптимуме n^* также растет с ростом σ и α.

Неопределенность рыночной среды и интенсивность сетевых экстерналий оказывают также воздействие на оптимальный инвестиционный порог. Поскольку оба эти фактора воздействуют на оптимальный инвестиционный порог и явно, и неявно (посредством изменения оптимального качества продукции), суммарное воздействие определяется следующей производной:

$$\frac{dx^*(q)}{d\theta} = \frac{\partial x^*(q)}{\partial\theta} + \frac{\partial x^*(q)}{\partial q}\frac{dq}{d\theta}, \quad \theta \in \{a, \sigma\}. \tag{17}$$

Возможность регулирования уровня качества продукции (услуг) в производственном процессе не оказывает влияния на классический результат теории реальных опционов.

Численные расчеты, проведенные в широких интервалах параметров модели, показывают, что оптимальный инвестиционный порог снижается с ростом уровня сетевых экстерналий. Это связано с тем, что более значительные сетевые экстерналии делают товарный рынок более привлекательным для фирмы. Это следует из более высокой стоимости инвестиционного проекта (при прочих равных условиях), и поэтому более низкие значения спроса x достаточны для достижения требуемого уровня рентабельности проекта $\beta_1/(\beta_1 - 1)$ в момент инвестирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Dixit A. K., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1996. P. 207–210.
2. Spence M. Product differentiation and welfare // American Economic Review. 1976. V. 66, № 3. P. 407–414.
3. Чепиков Э. В. Моделирование оптимальных инвестиционных стратегий в условиях неопределенности спроса и налоговой политики // Известия Таганрогского государственного радиотехнического университета. Тематический выпуск «Системный анализ в экономике и управлении». 2006. № 17 (72). С. 67–68.
4. Рогачёв А. Ф., Мелихов Д. А. Моделирование оптимальных инвестиционных стратегий фирмы в условиях неопределенности // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2009. № 4(24). С. 129–132.
5. Рогачёв А. Ф. Параметризация эконометрических зависимостей методом наименьших модулей // Управление экономическими системами: электрон. науч. журнал. 2011. № 3 (27). № гос. рег. статьи 0421100034. Режим доступа: http://uecs.mcnip.ru (дата обращения: 29.04.2011).
6. Скитер Н. Н. Моделирование оптимальных налоговых платежей за производственные выбросы // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2011. № 1 (14). С. 201–208.

REFERENCES

1. Dixit A. K., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton : Princeton University Press, 1996. P. 207–210.
2. Spence M. Product differentiation and welfare // American Economic Review. 1976. V. 66, # 3. P. 407–414.
3. Chepikov E. V. Modeling of the optimal investment strategies in the conditions of uncertainty of demand and tax policy // News of Taganrog State radio-technical university. Issue “Systematic analysis in economics and management”. 2006. # 17(72). P. 67–68.
4. Rogachev A. F., Melikhov D. A. Modeling of optimal investment strategies in the conditions of uncertainty // News of Orenburg state agrarian university. 2009. # 4(24). P. 129–132.
5. Rogachev A. F. Determination of parameters of economic dependence by means of the smallest modules // Management of economic systems: scientific journal. 2011. # 3 (27). No of the article state registration is 0421100034. Access mode: http://uecs.mcnip.ru (date of viewing: 29.04.2011).
6. Skiter N. N. Modeling of optimal tax payments for production emissions // Business. Education. Law Bulletin of the Volgograd Business Institute. 2011. # 1 (14). P. 201–208.