

Научная статья**УДК 37.026.1+377.031****DOI: 10.25683/VOLBI.2024.68.1076****Yuri Borisovich Melnikov**

Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor of the Department
of Computer Science of the Faculty
of Engineering and Economics,
Ural State Mining University;
Associate Professor
of the Department of Information Technology
and Automation,
Ural Federal University
Ekaterinburg, Russian Federation
yu.b.melnikov@yandex.ru

Veronika Igorevna Belousova

Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor
of the Department of Information Technology
and Automation,
Ural Federal University
Ekaterinburg, Russian Federation
v.i.belousova@urfu.ru

Юрий Борисович Мельников

канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры информатики
Инженерно-экономического факультета,
Уральский государственный горный университет;
доцент департамента информационной технологий
и автоматике Института радиоэлектроники
и информационных технологий-РТФ,
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Ekaterinburg, Российская Федерация
yu.b.melnikov@yandex.ru

Вероника Игоревна Белоусова

канд. физ.-мат. наук,
доцент департамента информационной технологий
и автоматике Института радиоэлектроники
и информационных технологий-РТФ,
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Ekaterinburg, Российская Федерация
v.i.belousova@urfu.ru

ПРИОРИТЕТНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КУЛЬТУРЫ РАБОТЫ С ПОНЯТИЙНЫМ АППАРАТОМ В ЦИФРОВУЮ ЭПОХУ НА ПРИМЕРЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

5.8.2 — Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)

Аннотация. В восприятии большинства людей математика ассоциируется с вычислениями. Но функции вычислительного аппарата математики во всё большей степени берут на себя компьютерные информационные технологии. Поэтому, хотя математики без вычислений не бывает, в обучении математике приоритетными становятся задачи математической формализации информации (в частности, построения математической модели, перевода с одного математического языка на другой, формирования математического понятия), восприятия и обработки математической информации и т. д. В курсе дискретной математики много задач, для решения которых практически не требуется вычислительных навыков, основные проблемы состоят именно в формализации. Как показывает опыт, знания определений недостаточно, необходимо владеть культурой работы с понятийным аппаратом. Для этого мы на основании опыта обучения и полученных ранее теоретических результатов (в частности, аппаратной модели математики) построили модели понятийного

аппарата и его использования и на этой базе выделили приоритетные компоненты работы с понятийным аппаратом: 1) привычка начинать анализ с определений понятий; 2) знание определений и умение их использовать; 3) способность самостоятельно обогащать понятийный аппарат новыми понятиями: 3а) выделять совокупность объектов в качестве объема специального понятия; 3б) формализовать в виде определения объем и содержание понятия; 3в) умение самостоятельно формулировать определения; 3г) комплексно анализировать их адекватность; 4) умение использовать понятийный аппарат для формализации информации, т. е. ее представления в соответствующих терминах. В работе приведены примеры применения модели из разных областей математики.

Ключевые слова: обучение математике, дискретная математика, понятийный аппарат, культура понятийного аппарата, определение понятия, объем понятия, содержание понятия, языки представления понятий, аппаратная модель математики, обучение решению задач

Для цитирования: Мельников Ю. Б., Белоусова В. И. Приоритетные компоненты культуры работы с понятийным аппаратом в цифровую эпоху на примере дискретной математики // Бизнес. Образование. Право. 2024. № 3(68). С. 480—487. DOI: 10.25683/VOLBI.2024.68.1076.

Original article

PRIORITY COMPONENTS OF THE CULTURE OF WORK WITH THE CONCEPTUAL APPARATUS OF MATHEMATICS

5.8.2 — Theory and methodology of training and education (by areas and levels of education)

Abstract. In the minds of most people, mathematics is associated with calculations. But the functions of the computing appa-

ratus of mathematics are increasingly being taken over by computer information technologies. Therefore, although there is no

mathematics without calculations, in teaching mathematics the priority is the task of mathematical formalization of information (in particular, building a mathematical model, translating from one mathematical language to another; forming a mathematical concept), perceiving and processing mathematical information, etc. There are many problems in the course of discrete mathematics, the solution of which requires practically no computational skills; the main problems lie precisely in formalization. As experience shows, knowledge of definitions is not enough; it is necessary to master the culture of working with the conceptual apparatus. To do this, based on learning experience and previously obtained theoretical results (in particular, the hardware model of mathematics), we built models of the conceptual apparatus and its use and, on this basis, identified the priority components of working with the conceptual apparatus: (1) the habit of starting the

analysis with definitions of concepts; (2) knowledge of definitions and ability to use them; (3) the ability to independently enrich the conceptual apparatus with new concepts: (3a) to single out a set of objects as the scope of a special concept; (3b) to formalize the scope and content of a concept as a definition; (3c) the ability to independently formulate definitions; (3d) comprehensively analyze their adequacy; (4) the ability to use the conceptual apparatus to formalize information, i.e. its presentation of information in appropriate terms. The paper provides examples of using the model from different areas of mathematics.

Keywords: *teaching mathematics, discrete mathematics, conceptual apparatus, culture of the conceptual apparatus, definition of a concept, scope of a concept, content of a concept, languages for representing concepts, hardware model of mathematics, teaching problem solving*

For citation: Melnikov Yu. B., Belousova V. I. Priority components of the culture of work with the conceptual apparatus of mathematics. *Biznes. Obrazovanie. Pravo = Business. Education. Law.* 2024;3(68):480—487. DOI: 10.25683/VOLBI.2024.68.1076.

Введение

Изученность проблемы. Математическая культура — часть культуры общества, она взаимодействует с другими видами культуры. Например, Л. Ченг [1] анализирует литературу по работе мозга при занятии математикой в зависимости от культурных особенностей субъекта деятельности. Е. В. Андриенко, А. Н. Дахин, Б. О. Майер, Е. А. Яровая [2] рассматривают математику как проектную культуру педагогики, исследуют дидактические вопросы формирования проектной культуры школьников средствами математики, ими выделены четыре функции проектной деятельности: 1) реализация особого варианта научного поиска; 2) объяснительная функция, причем в математической деятельности ее реализация использует сценарии-этюды в рамках системы математических языков; 3) функция управления проектной деятельностью; 4) формирование ценностной основы опыта обучаемого. М. Д. Боярский и П. И. Гниломедов [3] исследуют роль дидактической культуры преподавателя в решении проблем современного математического образования. Вопросам воспроизводства культуры обучения в США посвящена работа А. Вильсона и А. Урика [4], в которой подтверждается эффективность культурной традиции привлечения образовательных ресурсов вне рамок ресурсной базы школы. В Норвегии местные жители сопротивляются плану по закрытию школ в сельской местности, что побудило М. Вилла и А. Кнутас [5] к изучению влияния школы на воспроизводство местной культуры в Норвегии. Проблема актуальна и для России, где закрываются малокомплектные школы, что негативно влияет на судьбу населенных пунктов в условиях низкой плотности населения. Исторический аспект математической культуры рассматривает А. Романо [6]. Культурно-релевантное образование, т. е. обучение разнородных в культурном отношении людей, рассматривается Р. М. Rodríguez-Izquierdo, J. C. González-Faraco, S. Clivaz, T. Miyakawa, O. Agirdag, M. Van Houtte, P. Van Avermaet [7—9], различные аспекты культуры применения новых средств, — А. Clark-Wilson, С. А. Hoyles, S.-Y. Wu [10—13], новые участники образовательного процесса, включая онлайн-преподаватели и ютуберы, — J. Borup, С. В. Chambers, R. Stimson, J. Gil-Quintana, V. Malvasi и др. [14; 15]. Взаимовлияние культуры и качества математического образования исследуется L. Tian, Y. Huang, Ю. Б. Мельников и др. [16—18], влияние культуры на разные аспекты функционирова-

ния общества и потенциал их интеграции — F. D. Blau, M. Davoli, D. Serrano Corkin, L. Rüschenpöhler, J.-H. Ye, F. Han, E. V. Janica, M. T. Hora и др. [19—26]. Д. Девятловский и В. Игнатова [27] рассматривают влияние культуры на повышение эффективности деятельности, А. Сфард [28] исследует культурное развитие математических идей.

Актуальность исследования. В практике обучения математике приоритетным считается освоение вычислительного аппарата. Вычислительный аппарат математики мигрирует на цифровые платформы, поэтому в цифровую эпоху приоритетно обучение формализации и использованию формализованной информации. В результате цифровизации, во-первых, вычислительный аппарат математики «мигрирует» в цифровую среду (хотя математики без вычислений не бывает!), во-вторых, возрастает роль формализации информации. Поэтому актуальной является задача формирования культуры работы с понятийным аппаратом математики.

Целесообразность разработки темы. Выделение компонентов культуры работы с понятийным аппаратом, приоритетных для обучения решению задач, требующих минимального применения вычислительного аппарата, целесообразно по следующим причинам:

1. Необходимость адаптации целей, содержания и методики обучения к современной и перспективной цифровой среде, что особенно актуально для дискретной математики, тесно связанной с компьютерными технологиями.

2. Доступность информационных ресурсов, автоматизация многих видов мыслительной деятельности приводит к повышенным требованиям к культуре восприятия и обработки информации, в частности работы с понятийным аппаратом.

3. Развитие цифровой среды требует изменения образовательных стандартов, в частности, в области работы с понятийным аппаратом.

4. Как показывает опыт, основным препятствием к успешному применению математики является недостаточное умение математически формализовывать информацию, комплексно оценивать адекватность преобразований, интерпретировать результаты обработки, что обусловлено тем, что в настоящий момент мы не наблюдаем целенаправленного формирования культуры работы с понятийным аппаратом математики, большая часть средств контроля предназначена для оценки владения, в первую очередь, вычислительным аппаратом математики.

5. Развитие культуры работы с понятийным аппаратом математики необходимо для формирования межпредметных связей, которые играют особую роль в изучении и использовании, в первую очередь, дискретной математики, хотя актуальны и для математики в целом.

6. В последние годы получены результаты в области авторской теории моделирования Ю. Б. Мельникова и, в частности, теории управления, позволяющие рассчитывать на успех в достижении цели исследования и решения задач исследования.

Научная новизна. Впервые осуществлено и научно обосновано выделение четырех компонентов культуры работы с понятийным аппаратом математики, приоритетных для применения его с целью формализации информации и ее первичной обработки.

Цель работы состоит в выделении приоритетных компонентов культуры работы с понятийным аппаратом, что особенно актуально для эклектичного курса дискретной математики. Для достижения этой цели потребовалось решение следующих **задач**: 1) на основе анализа опыта обучения математике и научной литературы оценить актуальность темы исследования; 2) построить модель использования понятийного аппарата математики; 3) выделить приоритетные компоненты культуры работы с понятийным аппаратом математики; 4) проиллюстрировать результаты примерами.

Теоретическая значимость исследования. Выделение направлений работы с понятийным аппаратом, приоритетных с точки зрения применения к решению задач, не связанных с серьезным применением вычислительного аппарата математики, позволяет внести существенную корректировку теории и методики обучения математике в цифровую эпоху, как обучения управлению деятельностью на уровне типовых стратегий деятельности и даже на уровне методологии.

Практическая значимость исследования. Научно обоснованное и опробованное на практике выделение приоритетных направлений работы с понятийным аппаратом повышает качество усвоения и использования понятийного аппарата математики, способствует формированию компетенций в формализации информации, совершенствованию учебно-методического обеспечения.

Основная часть

Методология основана на моделировании, теории и практике обучения математике, авторской теории моделирования, базирующейся на формально-конструктивной трактовке модели, «алгебре моделей», теории адекватности, теории стратегий и др. Применен метод моделирования, в частности, создана и изучена модель, отражающая деятельностный аспект работы с понятийным аппаратом математики и теоретический анализ построенной модели.

Результаты исследования. Нас интересует выделение компонентов математической культуры. В работах [29; 30] анализируют способы оценки сформированности культуры математической речи. В [31] предложен следующий компонентный состав культуры: познавательный, коммуникативный, нравственный, трудовой, эстетический компоненты культуры, физическая культура. Эстетике математики, ее красоте уделяется недостаточно внимания как в методической, научно-методической и особенно учебной литературе, так и в практике обучения, поскольку основное внимание уделяется контролируемым, измеримым характеристикам (например, оценкам уровня знаний и умений). Измерение

эстетического аспекта математической деятельности весьма затруднительно и результат оценивания носит неустранимо субъективный характер. Эстетический компонент не выделен явно и в [32], в которой рассматриваются мотивационный компонент, процессуально-деятельностный, коммуникативный, рефлексивный компоненты. Все эти компоненты относятся к *субъективному аспекту* деятельности. Составляющие *объективного компонента* деятельности называют механизмом, аппаратом например, см. рис. 1.



Рис. 1. Аппаратная модель математики [33]

Аппаратный (объективный) компонент математической культуры. Математическая деятельность состоит исключительно в обработке и преобразование информации. Основой понятийного аппарата является система понятий, где под понятием мы понимаем триаду:

- 1) идентификатор (термин, обозначение и т. д.);
- 2) объем понятия (множество объектов, для которых может применяться этот идентификатор);
- 3) содержание понятия (система понятий).

Данная трактовка является упрощенной, поскольку содержание понятия формулируется на определенном языке, при этом элементы из объема понятия заменяются на их модели, сформулированные на этом языке, рассматриваются одновременно несколько языков и соответствующих моделей, см. рис. 2.



Рис. 2. Уточнение трактовки понятия как триады: объем понятия, содержание, идентификатор (термин или обозначение)

Объем понятия состоит из моделей, причем эти модели могут описывать разные аспекты прототипа, но интереснее ситуация, когда они по-разному описывают один и тот же аспект. Например, алгебра натуральных чисел в школьном курсе математики представлена, как минимум, на трех языках, иллюстрация к трем моделям операции «умножение» приведена на рис. 3.

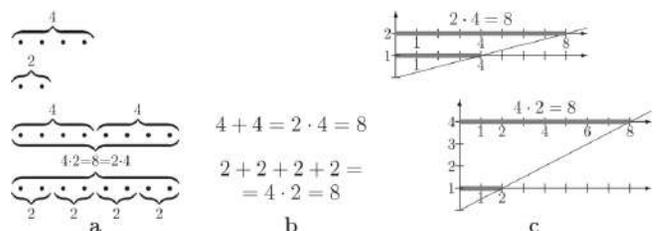


Рис. 3. Три модели из объема понятия «умножение натуральных чисел»

Важное для дискретной математики понятие отношения обычно использует три модели понятия «отношение» (для бинарных отношений используются еще и орграфы), см. рис. 4.



Рис. 4. Иллюстрация к использованию разных языков для формализации понятия «отношение»

Нередко интерпретация идентификатора понятия зависит от контекста. Например, хотя, строго говоря, отношением является подмножество, на практике отношением часто называют предикат-высказывание, например, во фразе «отношение равенства».

Деятельностный (субъективный) компонент математической культуры. Приоритетные компоненты культуры работы с понятийным аппаратом математики

ки. Примем модель использования понятийного аппарата, представленную на рис. 5 (отметим, что могут использоваться эквивалентные определения понятия, использующие разные характеристические свойства).

В субъективном компоненте культуры использования математического (не только понятийного, см. рис. 1) аппарата мы выделяем три уровня управления деятельностью: 1) уровень типовых алгоритмов; 2) уровень типовых методов и стратегий; 3) уровень методологии (некоторые вопросы методологической культуры обсуждаются в [34; 35]). Например, при изучении теоремы на уровне работы с готовыми алгоритмами обучаемому предъявляется готовое доказательство, он должен его запомнить и воспроизвести. На уровне методов и стратегий происходит обучение поиску доказательства. Работа на уровне методологии означает обучение формированию и развитию проблематики, понятийного аппарата, созданию и отбору гипотез, адаптации алгоритмов, методов, стратегий. Отнесение управления к одному из указанных уровней во многом носит субъективный характер: действия, выполняемые опытным ученым автоматически, на уровне алгоритма, для аспиранта могут быть управлением на уровне типовых стратегий, а для студента — на уровне методологии.

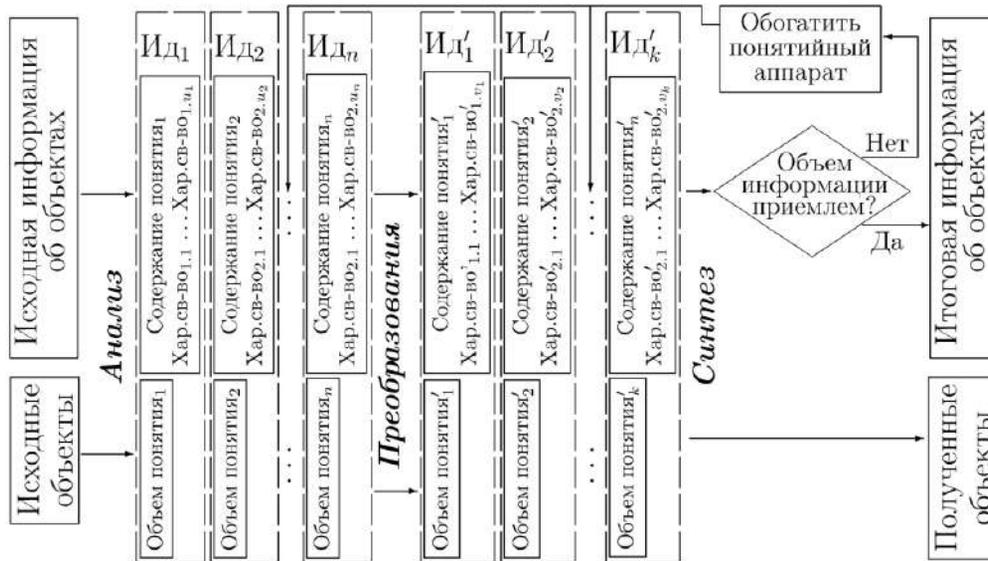


Рис. 5. Модель использования понятийного аппарата

В соответствии с моделью на рис. 5 целью анализа является декомпозиция входной информации по системе типовых понятий. При работе на уровне алгоритмов представление об объеме понятия достаточно формировать индуктивно. Например, объем понятия «натуральное число» вводится с помощью примеров, а объем понятия «иррациональное число» — с помощью отождествления с одним из способов его задания: «бесконечная непериодическая десятичная дробь». При работе на уровне типовых стратегий деятельности и на уровне методологии приоритетным становится дедуктивный способ введения математических понятий (с помощью определений). Итак, в силу абстрактности математических понятий основным инструментом для отнесения объекта к объему определенного понятия или для «опознания» элементов из объема конкретного понятия является определение этого понятия. Поэтому первым компонентом культуры работы с понятийным аппаратом математики мы считаем:

1) привычку начинать анализ с определений понятий (система типовых привычек является компонентом определенной культуры), для чего необходимо: **1а) знание его формулировки** и **1б) умение его использовать**.

1а) на этапе обучения знание формулировки означает ее запоминание, критерием которого является способность либо воспроизвести ее наизусть, либо сформулировать самостоятельно. Последнее предполагает знание общей структуры определения и основных компонентов определения конкретного понятия: родового понятия и характеристических свойств;

1б) умение использовать определение включает в себя два компонента: способность определить, принадлежит ли рассматриваемый объект объему понятия, и умение использовать определение для получения и доказательства следствий, для формирования и обоснования гипотез, методов, перспективных целей и стратегий деятельности.

Таким образом, еще одним из ключевых компонентов культуры работы с понятийным аппаратом математики является:

2) знание определений, способность определить, принадлежит ли объект объему понятия и умения применять определения для развития теории.

Основой понятийного аппарата любой науки является система неопределяемых понятий, для которых в ней нет родового понятия в данной области деятельности. Понятийный аппарат математики основан на двух неопределяемых понятиях: «множество» и «быть элементом множества». Но на практике некоторые понятия фактически рассматриваются как неопределяемые. Например, определение натурального числа как модели аксиоматики Пеано или как конечного ординала можно применять только при подготовке профессиональных математиков, как и определение понятия «отображение» через определение упорядоченной пары $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$.

Увеличение числа понятий, рассматриваемых как неопределяемые в школьном курсе математики, не является критически важным. Введение понятия — это определение его объема, а также термина или обозначения, оно позволяет, например, сделать формулировки утверждений более компактными, понятными. Сравните фразы «граф, у которого любая вершина достижима из любой его вершины» и ее эквивалент «граф связный». Индуктивное введение понятия, когда по мере изучения различных элементов из объема понятия обучаемый самостоятельно формирует критерии их принадлежности к объему этого понятия (аналогично работе нейросетей), не гарантирует формирование адекватных критериев принадлежности объектов объему понятия. Поэтому в науке приоритетным является дедуктивное введение понятий, с помощью определений. Итак, важным компонентом культуры работы с понятийным аппаратом является:

3) способность самостоятельно вводить новые понятия, точнее 3а) выделять совокупность объектов, которые целесообразно рассматривать как объем нового понятия; 3б) формализовать в виде определения объем и содержание понятия; 3в) умение формулировать определения; 3г) компактно анализировать их адекватность.

Развитие теории требует формулирования результатов, поэтому приоритетным компонентом культуры работы с понятийным аппаратом является:

4) умение использовать имеющийся понятийный аппарат для формализации информации, представления информации в терминах определенной предметной области.

Пример. На границе полуплоскости P фиксирована точка O и выходящий из нее луч L , перпендикулярный границе полуплоскости P . Найдите систему координат полуплоскости P , линии $u = \text{const} > 0$ которой — это окружности, проходящие через точку O , центры которых лежат на луче L .

Восприятие текста задачи надо начинать с ее требования. Найти надо *систему координат*. В силу того, что математические понятия описывают идеальные объекты, установить содержание понятия, в частности свойства элементов из объема понятия, можно только с помощью *анализа определения* этого понятия (см. первый приоритетный компонент культуры работы с понятийным аппаратом). Если работать на уровне алгоритмов, напрашивается найти определение в учебнике. Но в школьном курсе математики и даже в большинстве курсов высшей математики определение системы координат не дается. Более того, стратегия формализации понятий обычно тоже не рассматривается, поэтому придется

работать на уровне методологии. Согласно трактовке понятия как триады (объем понятия, содержание, идентификатор, см. рис. 2) формализация понятия обычно начинается либо с анализа ее содержания (например, так создаются аксиоматические теории), либо с анализа ее объема. Выберем второе. В данном случае можно рассмотреть прямоугольную декартову и полярную систему координат на плоскости. Анализ этих элементов из объема понятия «система координат» позволяет получить следующее определение: «системой координат области P плоскости называется функция, отображающая подмножество из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на P ».

Итак, нам надо найти функцию. Умение использовать имеющийся понятийный аппарат для формализации информации включает в себя знание типовых форм представления объектов из объема понятия. В школьном курсе математики функцию задают 1) описанием алгоритма вычисления значения (обычно формулой); 2) таблицей значений; 3) графиком. Оценивая адекватность каждого из этих способов, приходим к выводу о задании описанием алгоритма. Например, точку по ее координатам можно задать с помощью рис. 6, а, а алгоритм вычисления координат точки — с помощью «комикса» на рис. 6, а—с.

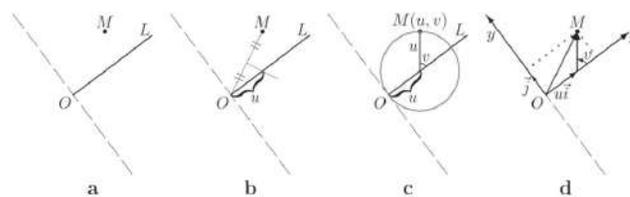


Рис. 6. К решению примера

Можно считать, что мы формулируем определение искомой системы координат. Но примененные нами способы задания алгоритма являются нетиповыми, что затрудняет применение второго и третьего приоритетных компоненты культуры работы с понятийным аппаратом. Искомую функцию можно определить традиционно, с помощью формулы, для чего необходим четвертый приоритетный компонент культуры работы с понятийным аппаратом, в данном случае, ввести прямоугольную декартову систему координат, например так, как на рис. 6, d. Тогда систему координат можно задать либо уравнением в векторной форме $\vec{OM}(u, v) = u(1 + \cos(v))\vec{i} + u \cdot \sin(v)\vec{j}$, либо $\begin{cases} x = u(1 + \cos(v)), \\ y = u \cdot \sin(v). \end{cases}$

Наконец, как реализацию четвертого приоритетного компонента культуры работы с понятийным аппаратом можно рассматривать введение понятия координатных линий системы координат.

Как оценку адекватности определения можно трактовать оценку корректности описания, например получения координат точки в прямоугольной системе координат и построения точки по ее координатам. Некорректность такого способа введения системы координат обусловлена тем, что в данном случае мы отождествляем систему координат (как функцию) с одним из способов ее задания (задание описанием алгоритма вычисления).

Выводы и обсуждение

Во-первых, актуальность исследования подтверждена не только опытом обучения дискретной математике и другим разделам математики, но и анализом отечественной и зарубежной научной литературы.

Во-вторых, на основе предложенной ранее Ю. Б. Мельниковым аппаратной модели математики (см. рис. 1) построена модель использования понятийного аппарата математики, представленная на рис. 5. Понятие нами трактуется как триада (см. рис. 2): 1) идентификатор понятия (термин или обозначение); 2) объем понятия; 3) содержание понятия.

В-третьих, на основе предложенных моделей и анализа нашей практики обучения (в первую очередь, дискретной математике) мы выделили приоритетные компоненты культуры работы с понятийным аппаратом:

- 1) привычка начинать анализ с определений понятий;
- 2) знание определений, способность определить, принадлежит ли объект объему понятия и умения применять определения для развития теории;
- 3) способность самостоятельно обогащать понятийный аппарат новыми понятиями:
 - а) выделять совокупность объектов, которые могут представлять интерес как объект исследования и/или удобный инструмент представления информации;
 - б) формализовать в виде определения объем и содержание понятия;

- в) умение самостоятельно формулировать определения;
- г) комплексно анализировать их адекватность;
- 4) умение использовать имеющийся понятийный аппарат для формализации информации, т. е. представления информации в терминах определенной предметной области.

В-четвертых, приведены примеры применения приоритетные компоненты культуры работы с понятийным аппаратом математики, см. рис. 3 и 4 и пример. Таким образом, задачи исследования решены и цель достигнута.

Полученный список приоритетов приводит к следующим задачам: 1) выяснить, насколько этот результат можно перенести на другие области деятельности, области науки и учебные предметы; 2) откорректировать и/или разработать учебно-методическое обеспечение, ориентированное на формирование культуры работы с понятийным аппаратом и плавном переходе от ориентации: 2а) на типовые алгоритмы; 2б) методы и стратегии, типовых для данной деятельности; к работе на уровне 2с) уровне методологии; 3) сформировать списки приоритетных направлений развития других компонентов математической культуры.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Tcheang L. Culture and Math // *Cognitive Neuroscience*. 2014. Vol. 5. Iss. 1. Pp. 54—65. DOI: 10.1080/17588928.2013.838552.
2. Андриенко Е. В., Дахин А. Н., Майер Б. О., Яровая Е. А. Математика как проектная культура педагогики // *Перспективы и приоритеты педагогического образования в эпоху трансформаций, выбора и вызовов* : сб. науч. тр. VI Виртуал. Междунар. форума по пед. образованию. Казань : Каз. (Приволж.) фед. ун-т, 2020. С. 25—28.
3. Боярский М. Д., Гнилomedов П. И. Роль дидактической культуры преподавателя в решении проблем современного математического образования // *Педагогическое образование в России*. 2017. № 12. С. 122—129. DOI: 10.26170/po17-12-19.
4. Wilson A., Urick A. Cultural reproduction theory and schooling: The relationship between student capital and opportunity to learn // *American Journal of Education*. 2021. Vol. 127. No. 2. Pp. 193—232. DOI: 10.1086/712086.
5. Villa M., Knutas A. Rural communities and schools – valuing and reproducing local culture // *Journal of Rural Studies*. 2020. Vol. 80. Pp. 626—633. DOI: 10.1016/j.jrurstud.2020.09.004.
6. Romano A. La Contre-Réforme mathématique : constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance 1540-1640. Roma : [Ecole française de Rome, 1999, xii, 691 p.
7. Rodríguez-Izquierdo R. M., González-Faraco J. C. La educación culturalmente relevante: un modelo pedagógico para los estudiantes de origen cultural diverso. Concepto, posibilidades y limitaciones // *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria*. 2021. Vol. 33. Num. 1. Pp. 153—172. DOI: 10.14201/teri.22990.
8. Clivaz S., Miyakawa T. The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson // *Educational Studies in Mathematics*. 2020. Vol. 105. Iss. 1. Pp. 53—70. DOI: 10.1007/s10649-020-09980-1.
9. Agirdag O., Van Houtte M., Van Avermaet P. Why Does the Ethnic and Socio-economic Composition of Schools Influence Math Achievement? The Role Futility and Futility Culture // *European Sociological*. 2012. Vol. 28. No. 3. Pp. 366—378.
10. Clark-Wilson A., Hoyles C. A research-informed web-based professional development toolkit to support technology-enhanced mathematics teaching at scale // *Educational Studies in Mathematics*. 2019. Vol. 102. No. 3. Pp. 343—359. DOI: 10.1007/s10649-018-9836-1.
11. Wu S.-Y. Incorporation of Collaborative Problem Solving and Cognitive Tools to Improve Higher Cognitive Processing in Online Discussion Environments // *Journal of Educational Computing Research*. 2020. Vol. 58. No. 1. Pp. 249—272. DOI: 10.1177/0735633119828044.
12. Mangisch Moyano G. C., Mangisch Spinelli M. R. El uso de dispositivos móviles como estrategia educativa en la Universidad // *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 2020. Vol. 23. Iss. 1. Pp. 201—222. DOI: 10.5944/ried.23.1.25065.
13. Project R-CASTLE: Robotic-Cognitive Adaptive System for Teaching and Learning / D. Tozadore, A. H. M. Pinto, J. Valentini et al. // *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*. 2019. Vol. 11. No. 4. Pp. 581—589. DOI: 10.1109/TCDS.2019.2941079.
14. Borup J., Chambers C. B., Stimson R. K-12 Student Perceptions of Online Teacher and On-site Facilitator Support in Supplemental Online Courses // *Online Learning*. 2019. Vol. 23. No. 4. Pp. 253—280. DOI: 10.24059/olj.v23i4.1565.
15. Gil-Quintana J., Malvasi V., Castillo-Abdul B., Romero-Rodríguez L. M. Learning Leaders: Teachers or Youtubers? Participatory Culture and STEM Competencies in Italian Secondary School Students // *Sustainability*. 2020. Vol. 12. Iss. 18. Art. 7466. DOI: 10.3390/SU12187466.
16. Tian L. Research of Mathematic Culture and Quality of Mathematics Education // *2014 2nd International Conference on Social Science and Health (ICSSH 2014)* / ed. by G. Lee. Newark, DE : Information Engineering Research INST, 2014. Pt. 4. Pp. 46—50. (Advances in Education Research; vol. 58).
17. Huang Y. Research on Mathematics Culture and College Mathematic Education // *Conference on Creative Education (CCE2011)*. Scientific Research Publishing, 2011. Pp. 232—235.
18. Мельников Ю. Б., Боярский М. Д., Локшин М. Д. Формирование математической культуры выпускника экономического университета как средство повышения его профессиональной компетентности // *Современное образование*. 2017. № 1. С. 99—111. DOI: 10.7256/2409-8736.2017.1.22616.

19. Culture and gender allocation of tasks: source country characteristics and the division of non-market work among us immigrants / F. D. Blau, L. M. Kahn, M. Comey et al. // *Review of Economics of the Household*. 2020. Vol. 18. Iss. 4. Pp. 907—958. DOI: 10.1007/s11150-020-09501-2.
20. Davoli M., Rodríguez-Planas N. Culture and adult financial literacy: Evidence from the United States // *Economics of Education Review*. 2020. Vol. 78. Art. 102013. DOI: 10.1016/j.econedurev.2020.102013.
21. Serrano Corkin D., Ekmekci A., Fisher A. Integrating culture, art, geometry, and coding to enhance computer science motivation among underrepresented minoritized high school students // *Urban Review*. 2020. Vol. 52. No. 5. Pp. 950—969. DOI: 10.1007/s11256-020-00586-8.
22. Rüschenpöhler L., Hönig M., Küsel J., Markic S. The role of gender and culture in vocational orientation in science // *Education Sciences*. 2020. Vol. 10. Iss. 9. Art. 240. DOI: 10.3390/educsci10090240.
23. Ye J.-H., Watthanapas N., Wu Y.-F. Applying Kahoot in Thai language and culture curriculum: Analysis of the relationship among online cognitive failure, flow experience, gameplay anxiety and learning performance // *International Journal of Information and Education Technology*. 2020. Vol. 10. No. 8. Pp. 563—572. DOI: 10.18178/ijiet.2020.10.8.1425.
24. Han F. Self-Concept and Achievement in Math among Australian Primary Students: Gender and Culture Issues // *Frontiers in Psychology*. 2019. Vol. 10. Art. 603. DOI: 10.3389/fpsyg.2019.00603.
25. Janica E. V. The wisdom of our Native American tribes: Advanced math, science and culture for the future // 2018 IEEE Integrated STEM Education Conference (ISEC). IEEE, 2018. Pp. 70—76. DOI: 10.1109/ISECon.2018.8340507.
26. Hora M. T., Smolarek B. B., Martin K. N., Scrivener L. Exploring the Situated and Cultural Aspects of Communication in the Professions: Implications for Teaching, Student Employability, and Equity in Higher Education // *American Educational Research Journal*. 2019. Vol. 56. Iss. 6. Pp. 2221—2261. DOI: 10.3102/0002831219840333.
27. Девятловский Д. Н., Игнатова В. В. Практиологическая культура обучающегося технического вуза: педагогические факторы и условия их реализации // *Science for Education Today*. 2019. Т. 9. №4. С. 144—160. DOI: 10.15293/2658-6762.1904.09.
28. Sfard A. Cultural Development of Mathematical Ideas // *Educational Studies in Mathematics*. 2015. Vol. 88. Iss. 2. Pp. 283—290. DOI: 10.1007/s10649-014-9586-7.
29. Костюченко Р. Ю. Критерии оценки развернутого ответа на итоговом экзамене по математике как образ современной культуры письменной математической речи // *Познание и деятельность: от прошлого к настоящему : материалы I Всероссий. междисциплинар. науч. конф. / отв. ред. И. П. Герашенко. Омск : Ом. гос. пед. ун-т, 2019. С. 274—277.*
30. Османова А. О. Формирование культуры математической речи младших школьников // *Modern Science*. 2019. № 11-3. С. 256—258.
31. Воронина Л. В., Моисеева Л. В. Математическая культура личности // *Педагогическое образование в России*. 2012. № 3. С. 37—45.
32. Ежова В. С. Реализация и проверка модели эффективности формирования математической культуры будущих учителей математики // *Научный поиск*. 2013. № 2. С. 16—19.
33. Мельников Ю. Б., Мельникова Н. В., Мельникова Ю. Ю. Использование моделей математики в учебном процессе // *Вестник УГТУ—УПИ: Серия «Информационно-математические технологии»*. 2006. № 6(77). С. 132—141.
34. Гельфман Э. Г., Пенская Ю. К. Развитие методологической культуры будущих учителей математики // *Вестник Томского государственного педагогического университета*. 2011. № 10(112). С. 34—37.
35. Шалаев И. К., Цымбалист О. В. Формирование культуры математического мышления как фактор повышения качества профессиональной подготовки инженерных кадров в современных условиях // *Вестник Алтайского государственного аграрного университета*. 2005. № 3(19). С. 8—9.

REFERENCES

1. Tcheang L. Culture and Math. *Cognitive Neuroscience*. 2014;5(1):54—65. DOI: 10.1080/17588928.2013.838552.
2. Andrienko E. V., Dakhin A. N., Mayer B. O., Yarovaya E. A. Mathematics as a design culture of pedagogy. *Perspektivy i priority pedagogicheskogo obrazovaniya v epokhu transformatsii, vybora i vyzovov = Prospects and priorities of pedagogical education in the era of transformations, choice and challenges. Collection of scientific papers of the VI Virtual International Forum on Teacher Education*. Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University publ., 2020:25—28. (In Russ.)
3. Boyarsky M. D., Gnilomedov P. I. The role of the didactic culture of the teacher in solving the problems of modern mathematical education. *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii = Pedagogical education in Russia*. 2017;12:122—129. (In Russ.) DOI: 10.26170/po17-12-19.
4. Wilson A., Urick A. Cultural reproduction theory and schooling: The relationship between student capital and opportunity to learn. *American Journal of Education*. 2021;127(2):193—232. DOI: 10.1086/712086.
5. Villa M., Knutas A. Rural communities and schools – valuing and reproducing local culture. *Journal of Rural Studies*. 2020;80:626—633. DOI: 10.1016/j.jrurstud.2020.09.004.
6. Romano A. *La Contre-Réforme mathématique : constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance 1540-1640*. Roma, Ecole française de Rome, 1999, xii, 691 p. (In French)
7. Rodríguez-Izquierdo R. M., González-Faraco J. C. Culturally Relevant Education: A pedagogical model for students from diverse cultural backgrounds. Concept, possibilities and limitations. *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria*. 2021;33(1):153—172. (In Spanish) DOI: 10.14201/teri.22990.
8. Clivaz S., Miyakawa T. The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics*. 2020;105(1):53—70. DOI: 10.1007/s10649-020-09980-1.
9. Agirdag O., Van Houtte M., Van Avermaet P. Why Does the Ethnic and Socio-economic Composition of Schools Influence Math Achievement? The Role Futility and Futility Culture. *European Sociological*. 2012;28(3):366—378.

10. Clark-Wilson A., Hoyles C. A research-informed web-based professional development toolkit to support technology-enhanced mathematics teaching at scale. *Educational Studies in Mathematics*. 2019;102(3):343—359. DOI: 10.1007/s10649-018-9836-1.
11. Wu S.-Y. Incorporation of Collaborative Problem Solving and Cognitive Tools to Improve Higher Cognitive Processing in Online Discussion Environments. *Journal of Educational Computing Research*. 2020;58(1):249—272. DOI: 10.1177/0735633119828044.
12. Mangisch Moyano G. C., Mangisch Spinelli M. R. The use of mobile devices as an educational strategy at university. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 2020;23(1):201—222. (In Spanish) DOI: 10.5944/ried.23.1.25065.
13. Tozadore D., Pinto A. H. M., Valentini J. et al. Project R-CASTLE: Robotic-Cognitive Adaptive System for Teaching and Learning. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*. 2019;11(4):581—589. DOI: 10.1109/TCDS.2019.2941079.
14. Borup J., Chambers C. B., Stimson R. K-12 Student Perceptions of Online Teacher and On-site Facilitator Support in Supplemental Online Courses. *Online Learning*. 2019;23(4):253—280. DOI: 10.24059/olj.v23i4.1565.
15. Gil-Quintana J., Malvasi V., Castillo-Abdul B., Romero-Rodríguez L. M. Learning Leaders: Teachers or Youtubers? Participatory Culture and STEM Competencies in Italian Secondary School Students. *Sustainability*. 2020;12(18):7466. DOI: 10.3390/SU12187466.
16. Tian L. Research of Mathematic Culture and Quality of Mathematics Education. *2014 2nd International Conference on Social Science and Health (ICSSH 2014)*. Advances in Education Research; vol. 58. G. Lee. (ed.). Newark, DE, Information Engineering Research INST, 2014;4:46—50.
17. Huang Y. Research on Mathematics Culture and College Mathematic Education. *Conference on Creative Education (CCE2011)*. Scientific Research Publishing, 2011:232—235.
18. Melnikov Yu. B., Boyarsky M. D., Lokshin M. D. Formation of the mathematical culture of a graduate of an economic university as a means of increasing his professional competence. *Sovremennoe obrazovanie = Modern Education*. 2017;1:99—111. (In Russ.) DOI: 10.7256/2409-8736.2017.1.22616.
19. Blau F. D., Kahn L. M., Comey M. et al. Culture and gender allocation of tasks: source country characteristics and the division of non-market work among us immigrants. *Review of Economics of the Household*. 2020;18(4):907—958. DOI: 10.1007/s11150-020-09501-2.
20. Davoli M., Rodríguez-Planas N. Culture and adult financial literacy: Evidence from the United States. *Economics of Education Review*. 2020;78:102013. DOI: 10.1016/j.econedurev.2020.102013.
21. Serrano Corkin D., Ekmekci A., Fisher A. Integrating culture, art, geometry, and coding to enhance computer science motivation among underrepresented minoritized high school students. *Urban Review*. 2020;52(5):950—969. DOI: 10.1007/s11256-020-00586-8.
22. Rüschenpöhler L., Hönig M., Küsel J., Markic S. The role of gender and culture in vocational orientation in science *Education Sciences*. 2020;10(9):240. DOI: 10.3390/educsci10090240.
23. Ye J.-H., Watthanapas N., Wu Y.-F. Applying Kahoot in Thai language and culture curriculum: Analysis of the relationship among online cognitive failure, flow experience, gameplay anxiety and learning performance. *International Journal of Information and Education Technology*. 2020;10(8):563—572. DOI: 10.18178/ijiet.2020.10.8.1425.
24. Han F. Self-Concept and Achievement in Math among Australian Primary Students: Gender and Culture Issues. *Frontiers in Psychology*. 2019;10:603. DOI: 10.3389/fpsyg.2019.00603.
25. Janica E. V. The wisdom of our Native American tribes: Advanced math, science and culture for the future. *2018 IEEE Integrated STEM Education Conference (ISEC)*. IEEE, 2018:70—76. DOI: 10.1109/ISECon.2018.8340507.
26. Hora M. T., Smolarek B. B., Martin K. N., Scrivener L. Exploring the Situated and Cultural Aspects of Communication in the Professions: Implications for Teaching, Student Employability, and Equity in Higher Education. *American Educational Research Journal*. 2019;56(6):2221—2261. DOI: 10.3102/0002831219840333.
27. Devyatlovskiy D. N., Ignatova V. V. Praxiological culture of technical university students: Educational factors and conditions for their implementation. *Science for Education Today*. 2019;9(4):144—160. (In Russ.) DOI: 10.15293/2658-6762.1904.09.
28. Sfarid A. Cultural Development of Mathematical Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 2015;88(2):283—290. DOI: 10.1007/s10649-014-9586-7.
29. Kostyuchenko R. Yu. Criteria for evaluating a detailed answer on the final exam in mathematics as an image of the modern culture of written mathematical speech. *Poznanie i deyatel'nost': ot proshlogo k nastoyashchemu = Cognition and activity: from the past to the present. Proceedings of the I all-Russian interdisciplinary scientific conference*. I. P. Gerashchenko (ed.). Omsk, Omsk State Pedagogical University publ., 2019:274—277. (In Russ.)
30. Osmanova A. O. Formation of the culture of mathematical speech in younger schoolchildren. *Modern Science*. 2019;11-3:256—258. (In Russ.)
31. Voronina L. V., Moiseeva L. V. Mathematical culture of personality. *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii = Pedagogical education in Russia*. 2012;3:37—45. (In Russ.)
32. Yezhova V.S. Implementing and testing the model of efficient formation of the mathematical culture in future math teachers. *Nauchnyi poisk*. 2013;2:16—19. (In Russ.)
33. Melnikov Yu. B., Melnikova Yu. Yu., Melnikova N. V. Using models of mathematics in the educational process. *Vestnik UGTU—UPI: Seriya «Informatcionno-matematicheskie tekhnologii»*. 2006;6(77):132—141. (In Russ.)
34. Gelfman E. G., Penskaya Yu. K. Development of methodological culture of future mathematics teachers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta = Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 2011;10(112):34—37. (In Russ.)
35. Shalaev I. K., Tsymbalist O. V. Formation of a culture of mathematical thinking as a factor in improving the quality of professional training of engineering personnel in modern conditions. *Vestnik Altaiskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta = Bulletin of Altai State Agricultural University*. 2005;3(19):8—9. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 27.06.2024; одобрена после рецензирования 31.07.2024; принята к публикации 05.08.2024.
The article was submitted 27.06.2024; approved after reviewing 31.07.2024; accepted for publication 05.08.2024.